

# DINAMIKA KONSTRUKCIJA



**Univerzitet u Novom Sadu**

**Fakultet tehničkih nauka**

**Departman za građevinarstvo i geodeziju**

**Katedra za konstrukcije**

**Prof. dr Andrija Rašeta**

**Doc. dr Vladimir Živaljević**

# Literatura

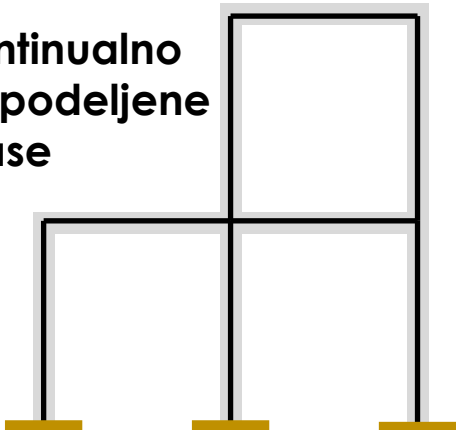
- Dinamika konstrukcija, M. Čaušević
- Dinamika građevinskih konstrukcija, B. Ćorić, R. Salatić, Građevinska knjiga
- Dinamika diskretnih sistema, Odabrana poglavlja, Stanko Brčić
- Teorija oscilacija, Miloš Kojić, Milan Mićunović
- Teorija oscilacija, Božidar Vujanović
- Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, A. Chopra
- Dynamics of Structures, Ray W. Clough, Joseph Penzien

# Dinamički modeli

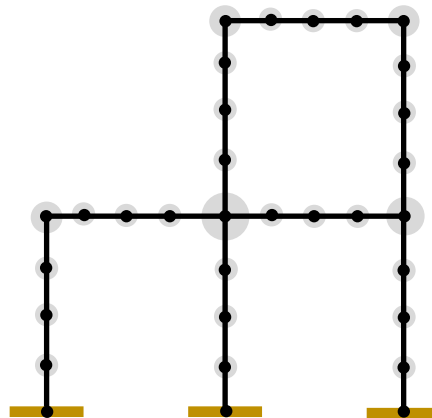
## Broj stepeni slobode kretanja sistema

- Broj nezavisnih parametara (Dekartove koordinate, krivolinijske koordinate, uglovi, itd.) koji u svakom trenutku vremena tokom kretanja jednoznačno određuju položaj sistema u prostoru
- Sistemi sa kontinualno raspoređenom masom (beskonačno mnogo stepeni slobode kretanja, parcijalne diferencijalne jednačine)
- Sistemi sa diskretno raspoređenim masama, tj. sistemi sa masama koncentrisanim u diskretnim tačkama (konačan broj stepeni slobode kretanja, obične diferencijalne jednačine)

## Kontinualno raspodeljene mase

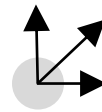


## Diskretno raspodeljene mase



## Masa

Mera inercnosti pri translatorsnom kretanju

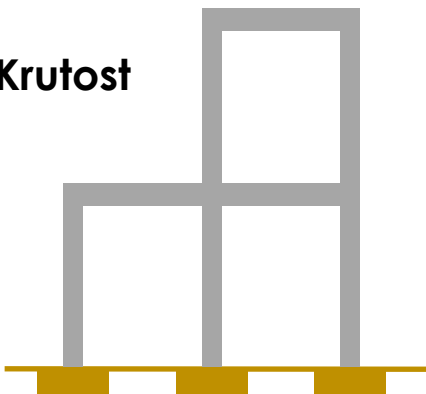


## (Maseni) moment inercije

Mera inercnosti pri obrtanju



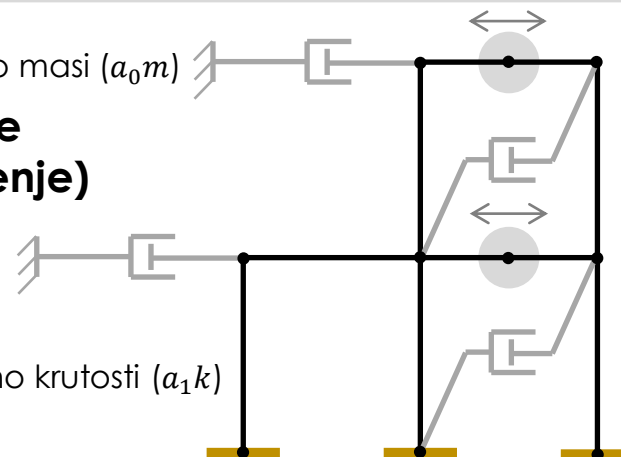
## Krutost



## Viskozno prigušenje (Rayleigh-jevo prigušenje)

Proporcionalno masi ( $a_0 m$ )

Proporcionalno krutosti ( $a_1 k$ )

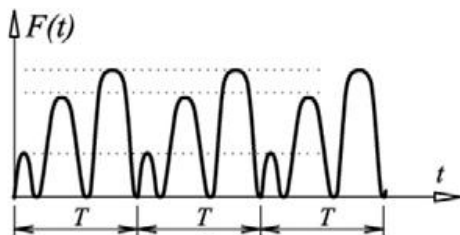


# Dinamički modeli

**DINAMIČKA DEJSTVA** se odlikuju promenom intenziteta u toku vremena pri kojem se uticaj nastalih inercijalnih sila ne može zanemariti pa je neophodno da se vrši dinamička analiza odgovora sistema

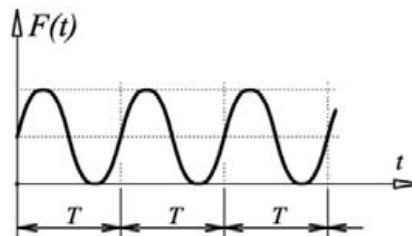
## Periodično dejstvo

Ponavlja se u jednakim vremenskim intervalima



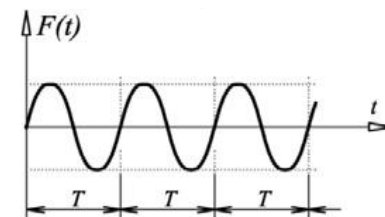
## Harmonijsko periodično dejstvo

Amplituda sile se menja po harmonijskoj funkciji sinusa ili kosinusa  
Poseban slučaj periodičnog dejstva

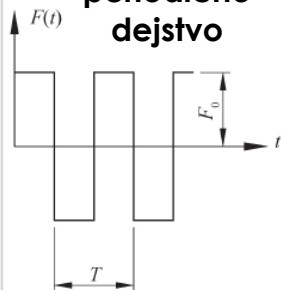


## Oscilatorno dejstvo

Srednja vrednost harmonijskog periodičnog dejstva iznosi nula

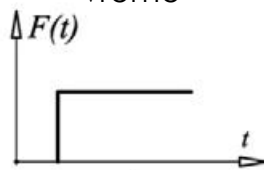


## Neharmonijsko periodično dejstvo

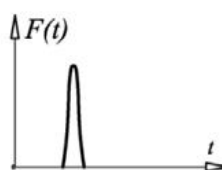


## Udarno dejstvo – Naglo naneto

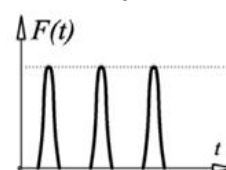
Ostaje duže vreme



Impuls  
Deluje veoma kratko vreme

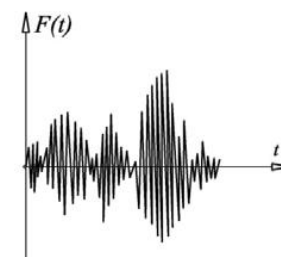


Seriya impulsa  
Periodično promenljivo



## Slučajna (stihijska, stohastička) dejstva

Kroz vreme se menja nepravilno  
Aperiodično dejstvo

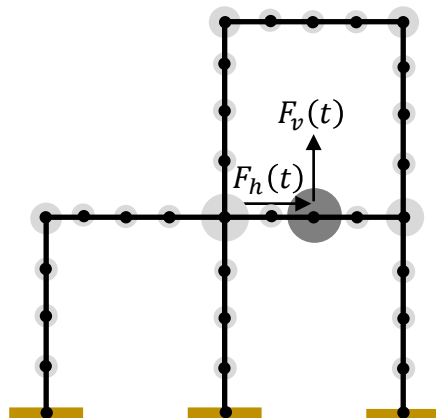
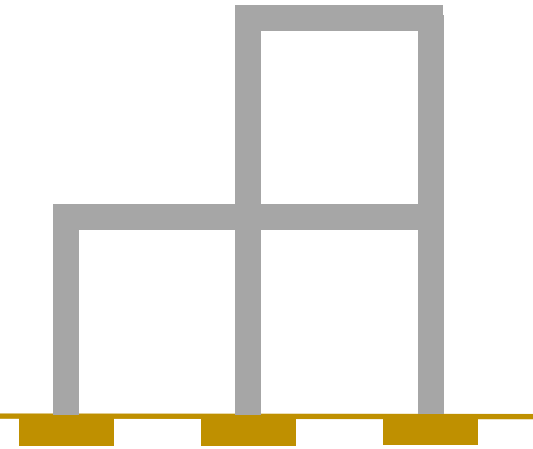
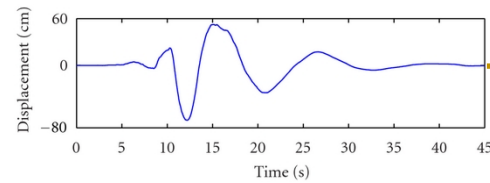
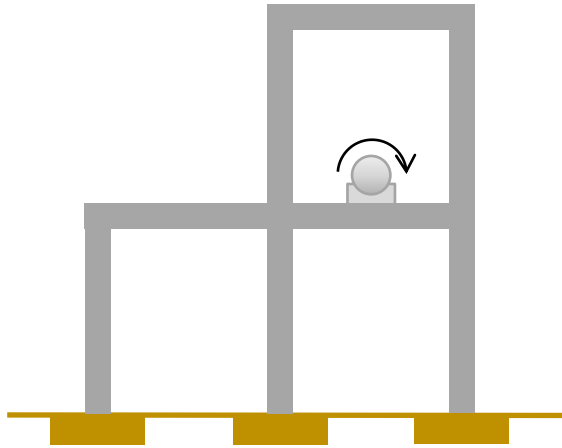


**Dinamičko temperaturno dejstvo** – npr. pri dejstvu požara mogu sa se javiti inercijane sile

**Dinamičko pomeranje oslonaca** – npr. pri dejstvu **zemljotresa** (proizvoljno pomeranje oslonaca)

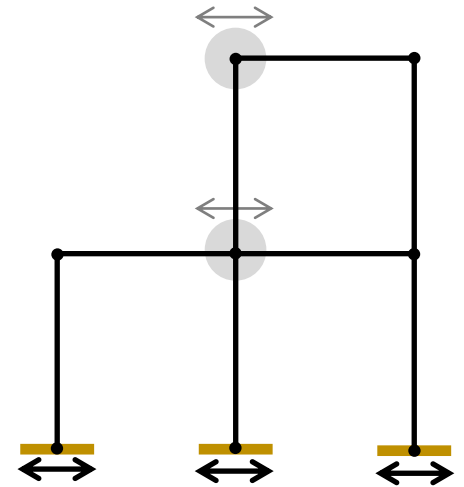


# Dinamički modeli



Harmonijska  
sila

Prinudno  
pomeranje osnove



# Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja SDOF (Single-Degree-Of-Freedom)

## ■ Slobodne neprigušene vibracije (oscilacije)

- Statički ugib opruge usled sile težine  $y_{st} = mg/k$
- Veza između koordinata glasi

$$\eta(t) = y_{st} + y(t)$$

masa  $m$  ... [masa ... kg]

krutost  $k$  ... [sila/dužina ... N/m ... kg/s<sup>2</sup>]

- Jednačina dinamičke ravnoteže  
(D'Alembert-ov princip; kretanje mase vertikalno na dole)

$$m\ddot{\eta}(t) + k\eta(t) - mg = 0$$

- Koristeći veze

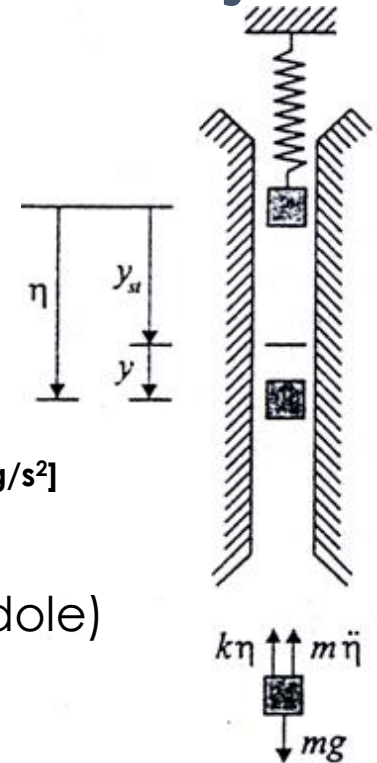
$$\ddot{\eta}(t) = \ddot{y}(t) \quad mg = ky_{st} = k(\eta(t) - y(t))$$

- dobija se diferencijalna jednačina kretanja slobodnih neprigušenih vibracija

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0$$

Komentar:

Svaki mehanički elastični sistem vibrira (osciluje) oko svog statički ravnotežnog položaja



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Deljenjem diferencijalne jednačine sa  $m$

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad /m \quad \ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0$$

- dobija se linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima  $k$  i  $m$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

- gde je  $\omega$  **svojstvena** (ili prirodna) **kružna frekvencija (slobodnih neprigušenih) vibracija**

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ili} \quad \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{\text{s}}$$

Komentar:  
 $\omega$  zavisi od  $k$  i  $m$  (prirodne (fizičke) karakteristike sistema)

- Opšte rešenje diferencijalne jednačine pretpostavlja se u obliku

$$y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

- gde su  $A$  i  $B$  integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova

$$y(0) = y_0 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Unoseći opšte rešenje u početne uslove određuju se integracione konstante

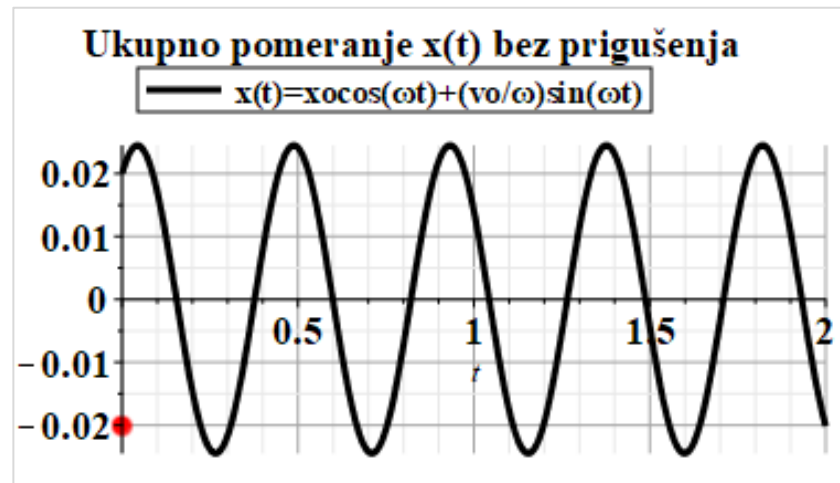
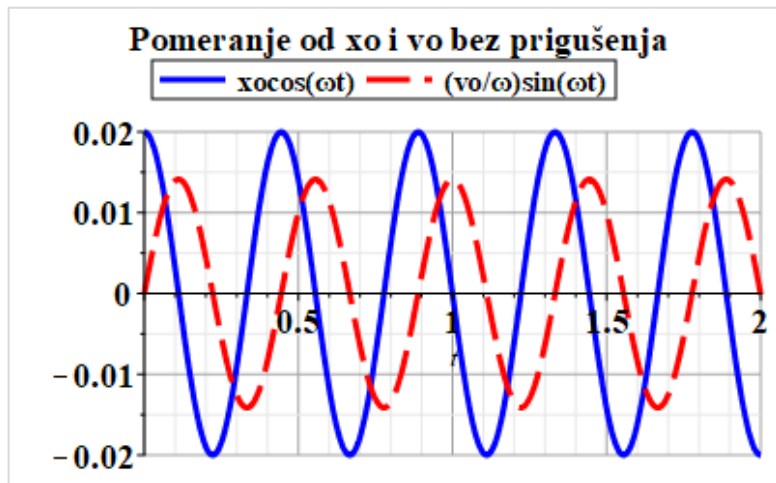
$$A = v_0/\omega \quad B = y_0$$

- i dobija se konačna jednačina kretanja slobodnih neprigušenih vibracija

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t)$$

Komentar:

Dva harmonijska kretanja (jer su trigonometrijske funkcije istovremeno i harmonijske) koja imaju istu svojstvenu kružnu frekvenciju, a različite amplitude



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Opšte rešenje diferencijalne jednačine može da se napiše u funkciji ugla  $\alpha$  i amplitude vibracija  $C$  uvodeći nove integracione konstante, umesto  $A$  i  $B$ , tako da važe sledeće veze

$$A = C \cos(\alpha) \quad \text{i} \quad B = C \sin(\alpha)$$

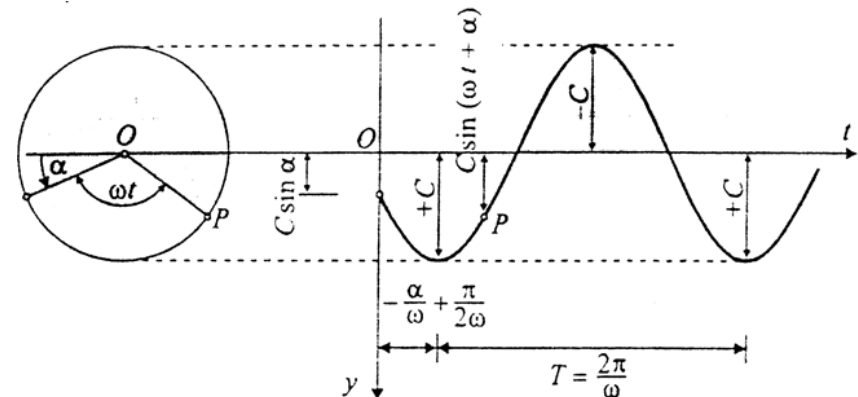
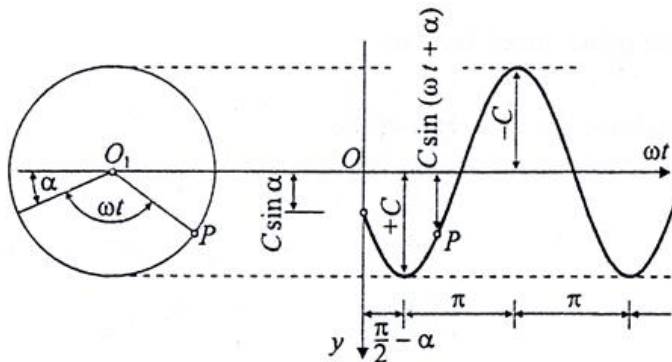
- odnosno sledi

$$y(t) = C(\cos(\omega t)\sin(\alpha) + \sin(\omega t)\cos(\alpha))$$

$$y(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$$

Komentar:

Periodično, harmonijsko, neprigušeno i oscilatorno kretanje



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Koristeći jednačine

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) \quad A = C \cos(\alpha) \quad B = C \sin(\alpha)$$

- slede veze između konstanti integracije

- **amplituda vibracija** (najveće udaljenje od ravnotežnog položaja)

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y_0^2}$$

Komentar:

**Elongacija** je pomeranje u proizvoljnom trenutku u odnosu na ravnotežni položaj

- **faza vibracija** ( $\omega t + \alpha$ ) ili **fazni ugao**

- ugao  $\alpha$  je **fazna razlika** (početna faza ili fazno pomeranje ili ugao faznog pomeranja)

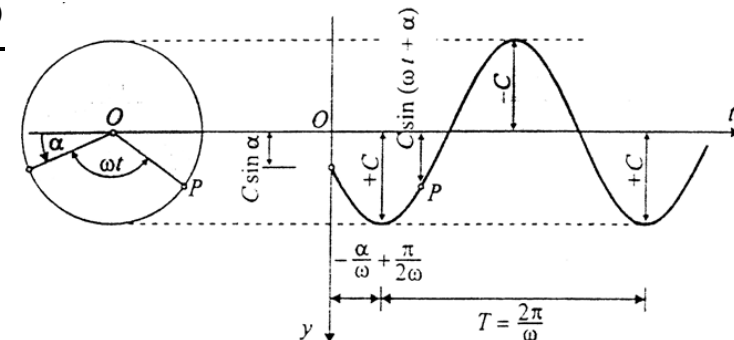
Komentari:

- Položaj sinusoide na vremenskoj osi zavisi od konstante  $\alpha/\omega$  (videti naredni slajd), tj. konstanta  $\alpha$  pokazuje pomernje sinusoide duž vremenske ose pa se zato naziva fazno pomeranje ili ugao faznog pomeranja
- $\alpha$  predstavlja faznu razliku između rezultujućeg kretanja i kretanja određenog delom  $y_0 \cos(\omega t)$
- Svakoј vrednosti tangensa odgovaraju dva ugla u granicama od 0 do  $2\pi$  pa su nam za određivanje fazne razlike potrebni sinus i kosinus ugla

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{B}{A} = \frac{y_0 \omega}{v_0}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{C} = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 y_0^2 + v_0^2}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{B}{C} = \frac{y_0}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y_0^2}}$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

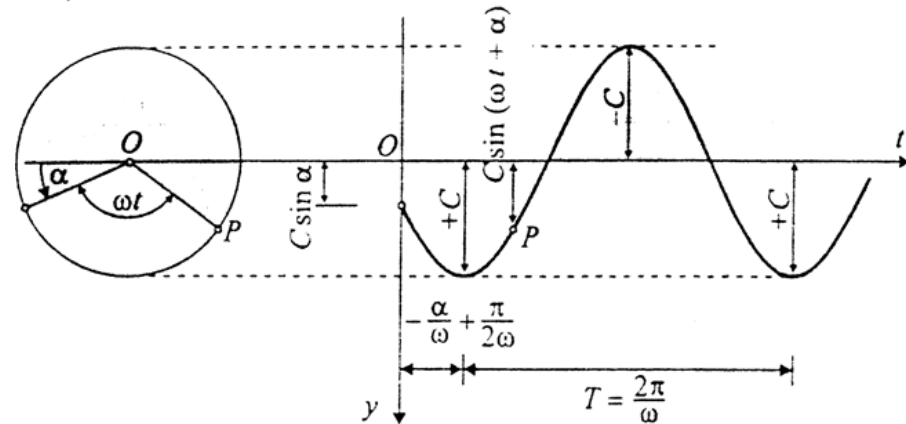
### ■ Period svojstvenih vibracija

$$y = C \sin(\omega t + \alpha) = +C \quad \sin(\omega t_i + \alpha) = 1 \Rightarrow t_i = \frac{(1 + 4i)\pi - 2\alpha}{2\omega} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$t_0 = -\frac{\alpha}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \quad t_1 = -\frac{\alpha}{\omega} + \frac{5\pi}{2\omega} \quad t_2 = -\frac{\alpha}{\omega} + \frac{9\pi}{2\omega}$$

Razlika između trenutaka u kojima se dostiže amplituda istog znaka

$$T = \frac{2\pi}{\omega} [\text{s}]$$



### ■ Svojstvena frekvencija

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Hz}]$$

### ■ Tehnička frekvencija

$$n = 60f = \frac{60}{T} [\text{cik/min}]$$

Karakteristike

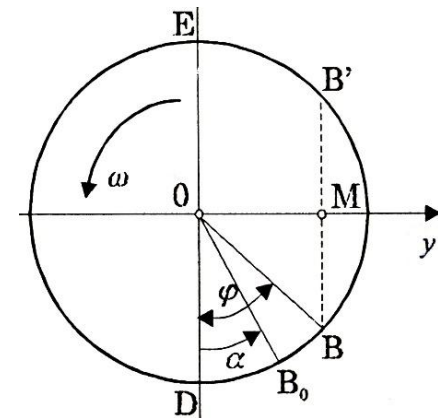
- Svojstvena kružna frekvencija  $\omega$  i svojstveni period vibracija  $T$  **ne zavise od početnih uslova** i predstavljaju nepromenljive karakteristike sistema (fizičke konstante; **zavise od krutosti i mase dinamičkog sistema**)
- Amplituda  $C$  i fazna razlika  $\alpha$  **zavise od početnih uslova**

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Kinematička interpretacija kretanja

- Tačka B se kreće ravnomerno po krugu poluprečnika **C** (**amplituda vibracija**) polazeći od položaja  $B_0$ .
- Početni položaj tačke B je  $B_0$  je određen uglom  $\alpha$  (**fazna razlika** ili **početna faza**).
- Konstantna **ugaona brzina obrtanjaja** iznosi  $\omega$ .
- U trenutku  $t$  ugao  $\varphi$  (**faza vibracija**) iznosi:  $\varphi = \alpha + \omega t$ .
- **Projekcija M tačke B** se kreće po zakonu  $y(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$ , tj. vrši **slobodno harmonijsko kretanje**.
- **Koordinata y određuje položaj u datom vremenskom trenutku.**
- **Faza  $\varphi$  određuje položaj tačke u datom vremenskom trenutku i smer kretanja** tj. tačka M se kreće „u desno“ pri fazi  $\varphi$ , a „u levo“ smeru pri fazi  $\pi - \varphi$ .
- Ako se faze razlikuju za  $2\pi$  smatraju se jednakim.
- S obzirom da je  $\varphi = \alpha + \omega t$ , **kružna frekvencija  $\omega$  može se zvati i fazna brzina.**
- **Period vibracija T** je vreme za koje tačka izvrši punu oscilaciju, tj. vreme za koje ponovo dođe u istu fazu.

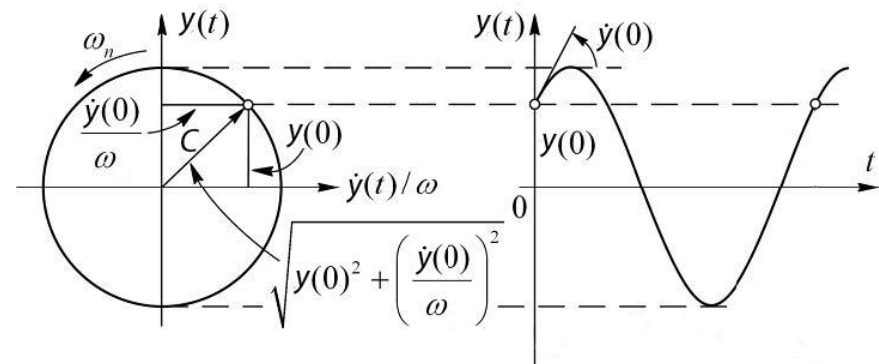


$$\varphi = \alpha + \omega t$$

### Analogija kružnog i harmonijskog kretanja

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) \quad \dot{y}(t) = v_0 \cos(\omega t) - \omega y_0 \sin(\omega t) \quad / : \omega$$

... zatim kvadriramo  $y(t)$  i  $\dot{y}(t)/\omega$ , pa ih saberemo i grupišemo uz  $(y_0)^2$  i  $(v_0/\omega)^2$ , vodeći računa da je  $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ , dobijamo jednačinu kružnice u sistemu  $\dot{y}(t)/\omega$  i  $y(t)$

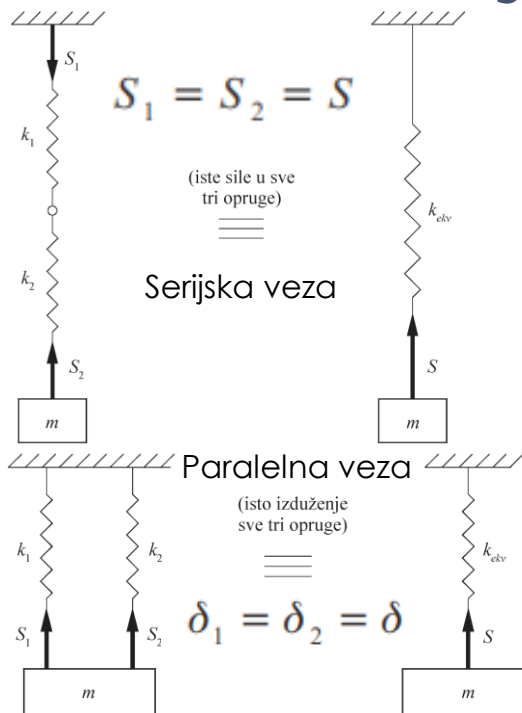




# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## Krutost dinamičkog modela

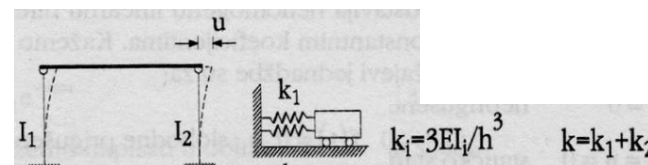
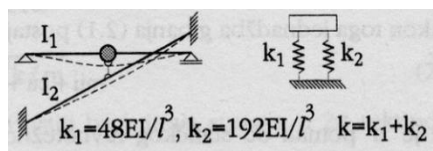
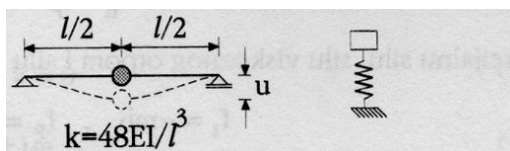
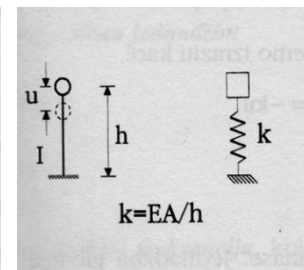
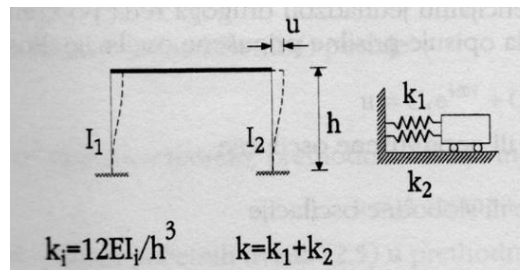
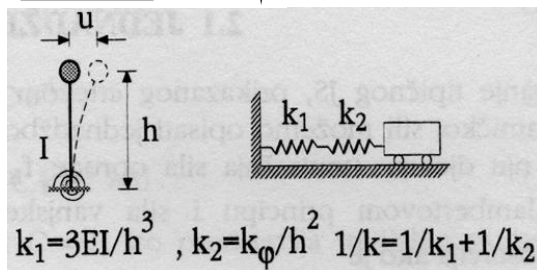
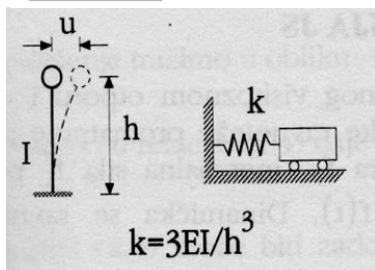
(elastični otpor pri pomeranju mase)



$$\frac{S_1}{k_1} + \frac{S_2}{k_2} = \frac{S}{k_{ekv}} \Rightarrow \frac{1}{k_{ekv}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

$$S_1 + S_2 = mg = S \quad S_1 = k_1 \cdot \delta_1 \quad S_2 = k_2 \cdot \delta_2 \quad S = k_{ekv} \cdot \delta$$

$$k_1 \cdot \delta_1 + k_2 \cdot \delta_2 = k_{ekv} \cdot \delta \Rightarrow k_{ekv} = k_1 + k_2 = \sum_{i=1}^n k_i$$

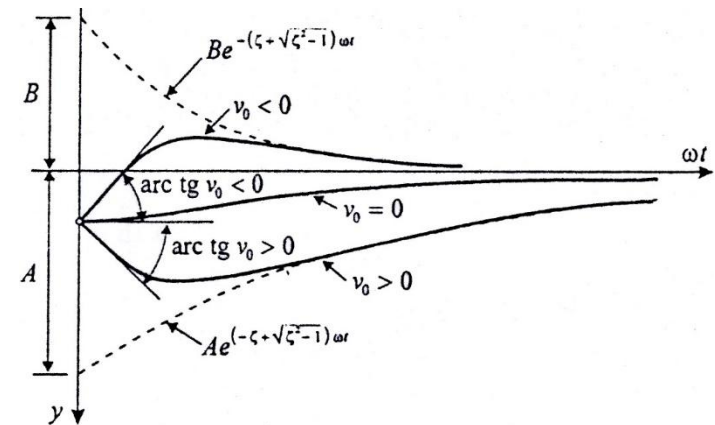
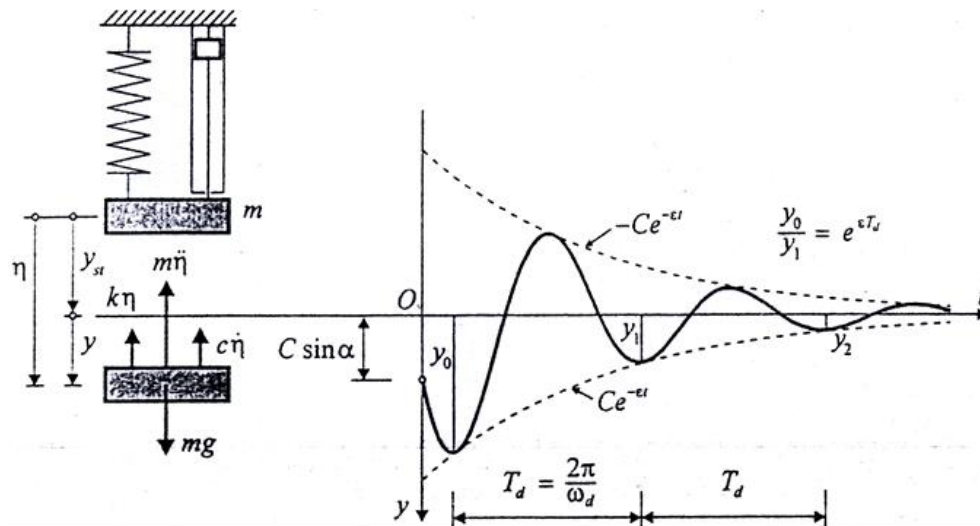


# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Prigušenje se uvodi u proračun kao **viskozno prigušenje (proporcionalno brzini)**

Viskozno prigušenje  $c$  ... [masa/vreme ... kg/s]



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Jednačina dinamičke ravnoteže (D'Alembert-ov princip)

$$m\ddot{\eta}(t) + c\dot{\eta}(t) + k\eta(t) - mg = 0$$

- Veza između koordinata

$$\eta(t) = y_{st} + y(t)$$

- Sila u opruzi

$$k\eta(t) = k(y_{st} + y(t))$$

- Sila prigušenja

$$c\dot{\eta}(t) = c\dot{y}(t)$$

- Inercijalna sila

$$m\ddot{\eta}(t) = m\ddot{y}(t)$$

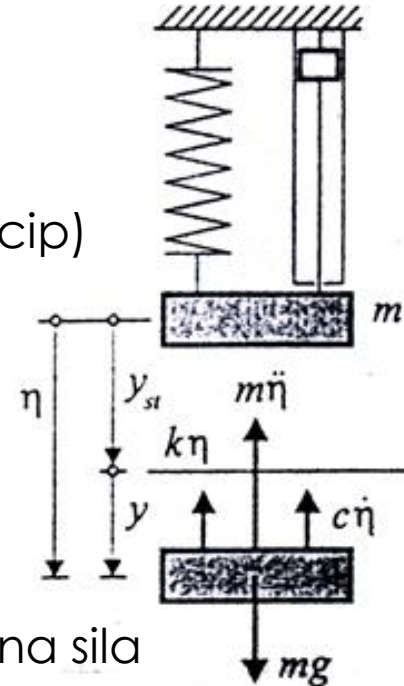
- Uvodi se koeficijent prigušenja  $\varepsilon = \frac{c}{2m}$

- i sada diferencijalna jednačina kretanja slobodnih prigušenih vibracija glasi

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

Komentar:

Linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima  $k$ ,  $m$  i  $c$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Rešenje se traži u obliku eksponencijalnih funkcija

$$y(t) = e^{rt} \quad \dot{y}(t) = r e^{rt} \quad \ddot{y}(t) = r^2 e^{rt}$$

- pa se dobija karakteristična jednačina

$$r^2 + 2\varepsilon r + \omega^2 = 0$$

- sa sledećim rešenjem za eksponent  $r$

$$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

- Sada opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine drugog reda ima sledeći oblik

$$y(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

- Priroda rešenja zavisi od prigušenja i razlikuju se tri slučaja

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- **Prvi slučaj**  $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$  ( $\varepsilon < \omega$ )

- **Malo ili podkritično prigušenje** – uobičajen slučaj kod građevinskih konstrukcija
- Rešenja za  $r$  glase

$$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \omega_d i$$

- Sada rešenje diferencijalne jednačine ima sledeći oblik

$$y(t) = e^{-\varepsilon t} (\bar{A} e^{i\omega_d t} + \bar{B} e^{-i\omega_d t})$$

- Primenom Euler-ovih obrazaca

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$$

- rešenje diferencijalne jednačine dobija oblik

$$y(t) = e^{-\varepsilon t} (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t))$$

- Početni uslovi glase

$$y(0) = y_0 \text{ i } \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Prvi slučaj  $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$  ( $\varepsilon < \omega$ )

- Malo ili podkritično prigušenje

- Primenom početnih uslova konačna jednačina kretanja glasi

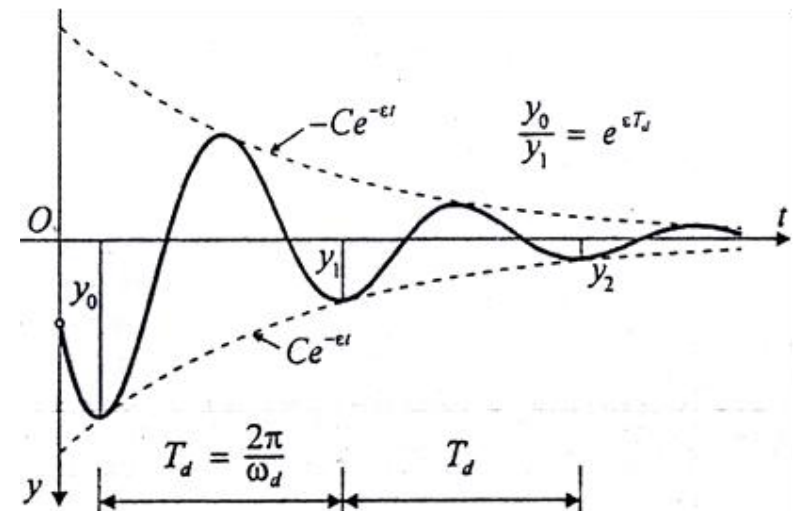
$$y(t) = e^{-\varepsilon t} \left( \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + y_0 \cos(\omega_d t) \right)$$

- Rešenje diferencijalne jednačine, slično kao i kod neprigušenih vibracija, može da se prikaže u obliku

$$y(t) = C e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_d t + \alpha)$$

Komentari:

- Aperiodično kretanje jer se vremenom maksimalna pomeranja od ravnotežnog položaja smanjuju
- Harmonijsko kretanje vibracionog/oscilatornog karaktera jer je funkcija sinusa harmonijska, a interval vremena koji prođe između dve susedne amplitude istog znaka uvek je isti i iznosi  $T_d$  pa se zbog ovoga naziva još i prigušeno vibraciono/oscilatorno kretanje



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Prvi slučaj  $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$  ( $\varepsilon < \omega$ )

- Malo ili podkritično prigušenje
- Amplituda

$$C e^{-\varepsilon t} \quad \text{gde je} \quad C = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d}\right)^2 + y_0^2}$$

Fazna razlika

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y_0 \omega_d}{v_0 + \varepsilon y_0}$$

- Kružna frekvencija prigušenih vibracija

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} [\text{rad/s}]$$

- gde je

- relativno prigušenje

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{c_{kr}}$$

$$\zeta < 1$$

Komentar:  
Bezdimenzijski  
koeficijent prigušenja

kritično prigušenje

$$c_{kr} = 2m\omega = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega}$$

$$\zeta = 1$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

### ■ Prvi slučaj $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$ ( $\zeta < 1$ )

#### ■ Malo ili podkritično prigušenje

#### ■ Period slobodnih prigušenih vibracija

- Traže se trenuci vremena kada se javljaju amplitude vibracija sa istim predznakom

$$\sin(\omega_d t_i + \alpha) = 1 \Rightarrow \omega_d t_i = -\alpha + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi i\right) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$t_0 = -\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{\pi}{2\omega_d} \quad t_1 = -\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{\pi}{2\omega_d} + \frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + T_d$$

$$t_2 = t_0 + 2\frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + 2T_d \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} [\text{s}]$$

Komentar:  
 $T_d > T$  i raste sa  
 povećanjem prigušenja

#### ■ Frekvencija slobodnih prigušenih vibracija

$$f_d = \frac{1}{T_d} = f \sqrt{1 - \zeta^2} [\text{Hz}]$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Prvi slučaj  $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$  ( $\zeta < 1$ )

- Malo ili podkritično prigušenje

- Trenuci vremena kada se javljaju amplitude vibracija

$$t_0 = -\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{\pi}{2\omega_d} \quad t_1 = -\frac{\alpha}{\omega_d} + \frac{\pi}{2\omega_d} + \frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + T_d \quad t_2 = t_0 + 2\frac{2\pi}{\omega_d} = t_0 + 2T_d$$

- Vrednosti amplitude vibracija u trenucima vremena  $t_0, t_1, t_2, \dots$

$$y_0 = Ce^{-\varepsilon t_0} \quad y_1 = Ce^{-\varepsilon t_1} = Ce^{-\varepsilon(t_0 + T_d)} \quad y_2 = Ce^{-\varepsilon t_2} = Ce^{-\varepsilon(t_0 + 2T_d)}$$

- Količnici između amplitude istog znaka

$$\frac{y_0}{y_1} = e^{\varepsilon T_d} \quad \frac{y_0}{y_2} = e^{2\varepsilon T_d} \quad \frac{y_0}{y_s} = e^{s\varepsilon T_d}$$

- Iz prethodnog se zaključuje sledeće

- količnici dve uzastopne amplitude istog znaka su konstantni
      - amplitude se umanjuju prema zakonu geometrijske progresije

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

- Prvi slučaj  $\omega_d^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 > 0$  ( $\zeta < 1$ )

- Malo ili podkritično prigušenje

- Logaritamski dekrement ili logaritamsko opadanje  $\delta$  (logaritam količnika dve uzastopne amplitude istog znaka)

$$\delta = \ln(y_1/y_2) = \ln(e^{-\varepsilon t_1}/e^{-\varepsilon t_2}) = \ln(e^{\varepsilon(t_2-t_1)}) = \ln(e^{\varepsilon T_d}) = \varepsilon T_d$$

- Vreme za koje se ostvari  $s$  ciklusa vibracija  $t_s = t_0 + sT_d$
  - Koristeći prethodne veze dobija se sledeća zavisnost  $s\delta = \ln(y_0/y_s) = s\varepsilon T_d$

- Iz prethodnog izraza sledi  $\varepsilon = \frac{\ln(y_0/y_s)}{sT_d} = \frac{\delta}{T_d}$

- Prethodni izraz može da se iskoristi za merenje prigušenja na osnovu merenja karakteristika konstrukcije

$$\delta = \varepsilon T_d = \zeta \omega T_d = \zeta \omega \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

### ■ Merenje relativnog prigušenja $\zeta$ u konstrukciji

- Ako je relativno prigušenje  $\zeta \ll 1$  sledi

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta$$

- Tačniji rezultat se dobija ako se međusobno podele amplitude  $x_i$  i  $x_{i+j}$  gde je  $j > 3$

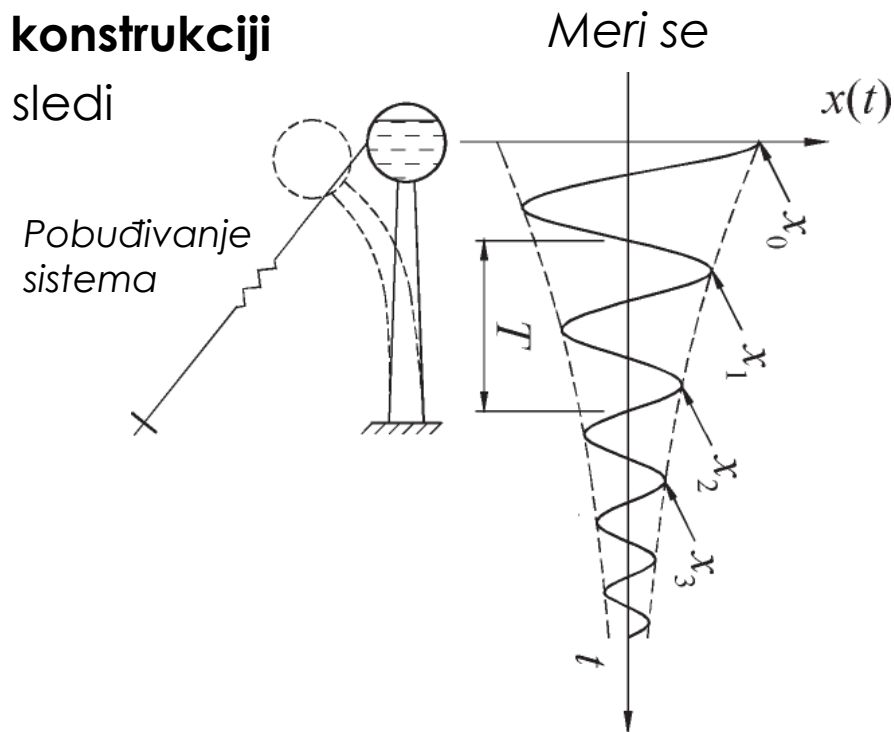
$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left( \frac{x_i}{x_{i+j}} \right) = 2\pi\zeta$$

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{x_0}{x_n} \right) = 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{\delta}{2\pi}$$

$$\ln \left( \frac{x_0}{x_n} \right) = \delta + \delta + \dots + \delta = n\delta$$

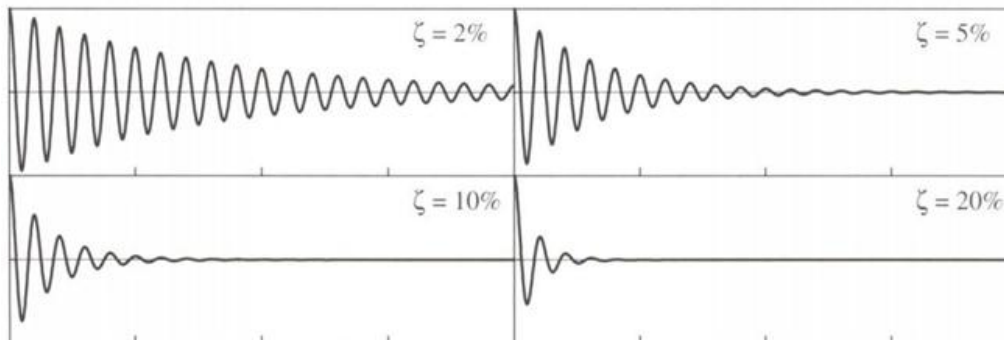
Merenjem se određuje  $T_d$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- Slobodne prigušene vibracije
  - Malo ili podkritično prigušenje

$$\zeta < 1$$



Nivo naprezanja	Vrsta konstrukcije	Relativno prigušenje $\zeta = \frac{\varepsilon}{\omega}$
Naprezanja manja od 50% granice tečenja	a) Cevovodi i mašinska oprema	0.01 – 0.02
	b) Zavarene konstrukcije, prethodno napregnuti beton i armirani beton sa armaturom u obe zone preseka	0.02 – 0.03
	c) Armirani beton sa dosta prslina	0.03 – 0.05
	d) Čelične konstrukcije sa vijcima ili zakivcima, drvene konstrukcije	0.05 – 0.07
Naprezanja nešto manja od granice tečenja	a) Cevovodi i mašinska oprema	0.02 – 0.03
	b) Zavarene konstrukcije i dobro prednapregnuti beton	0.05 – 0.07
	c) Delimično prednapregnuti beton	0.07 – 0.10
	d) Armirani beton	0.07 – 0.10
	e) Zakovane ili vijcima povezane čelične konstrukcije, drvene konstrukcije povezane zavrtnjima	0.10 – 0.15
	f) Drvene konstrukcije povezane žlebovima	0.15 – 0.20

Komentari:

- Periodi  $T$  i  $T_d$  ( $T < T_d$ ) se vrlo malo razlikuju za uobičajen nivo prigušenja
- Amplituda se vrlo brzo priguši

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

### ■ Drugi slučaj $\varepsilon = \zeta\omega > \omega \Rightarrow \zeta > 1$

- Nadkritično ili veliko prigušenje
- Rešenja karakteristične jednačine

$$r_1 = \omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$r_2 = -\omega(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

- Opšte rešenje glasi

$$y(t) = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t} + Be^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega t}$$

- Početni uslovi

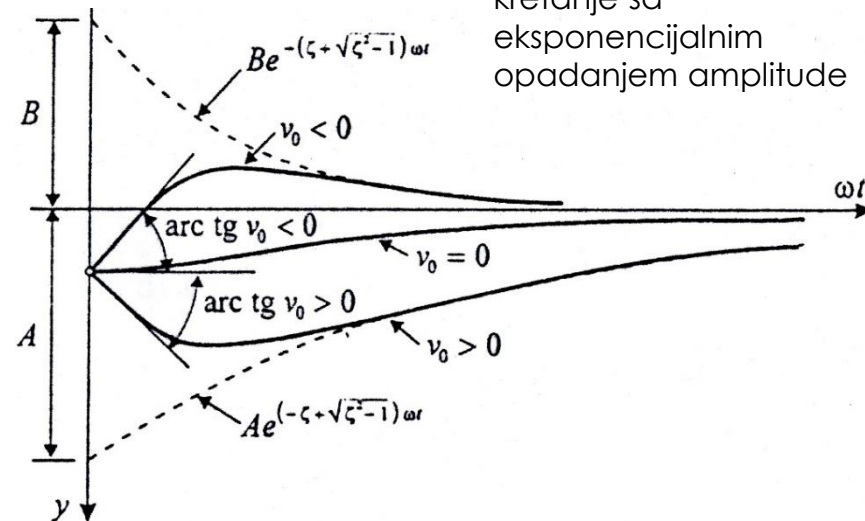
$$y(0) = y_0 \text{ i } \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0$$

- Uvođenjem opšteg rešenja u početne uslove određuju se integracione konstante

$$A = \frac{v_0 + y_0\omega(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$B = \frac{-v_0 + y_0\omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Komentar:  
Aperiodično,  
prigušeno, nije  
vibraciono/oscilatorno  
kretanje sa  
eksponencijalnim  
opadanjem amplitude



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Slobodne prigušene vibracije

### ■ Treći slučaj $\varepsilon_{cr} = \zeta\omega = \omega \Rightarrow \zeta = 1$

#### ■ Kritično prigušenje

#### ■ Rešenja karakteristične jednačine glase

$$r_{1,2} = -\omega$$

#### ■ Opšte rešenje diferencijalne jednačine glasi

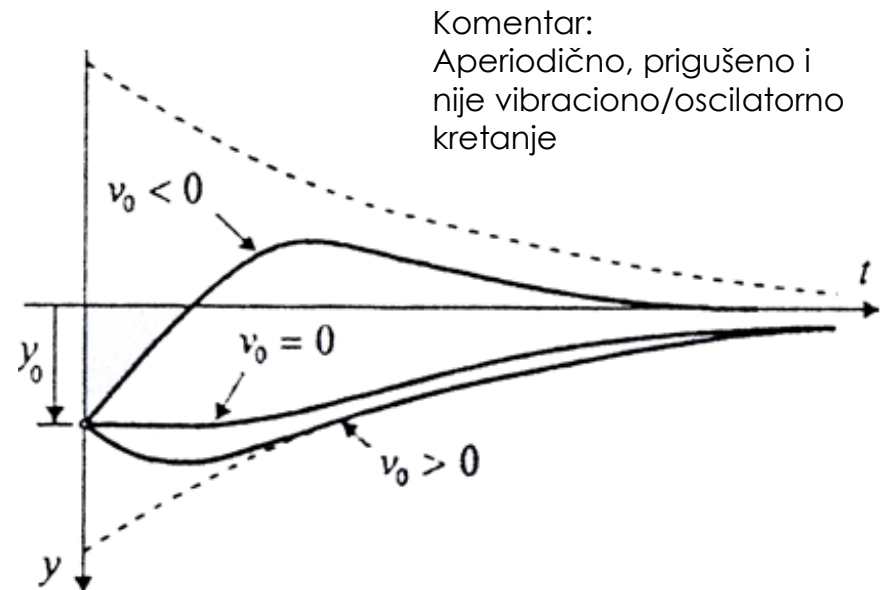
$$y(t) = (A + Bt)e^{\varepsilon_{kr}t}$$

#### ■ Početni uslovi

$$y(0) = y_0 \text{ i } \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0$$

#### ■ Konačna jednačina kretanja

$$y(t) = |y_0 + (v_0 + \varepsilon_{kr}y_0)t|e^{-\varepsilon_{kr}t}$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

- Jednačina dinamičke ravnoteže (D'Alembert-ov princip)

$$m\ddot{\eta}(t) + c\dot{\eta}(t) + k\eta(t) - mg = F(t)$$

- Veza između koordinata glasi

$$\eta(t) = y_{st} + y(t)$$

- odnosno jednačina dinamičke ravnoteže glasi

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

- Koeficijent prigušenja

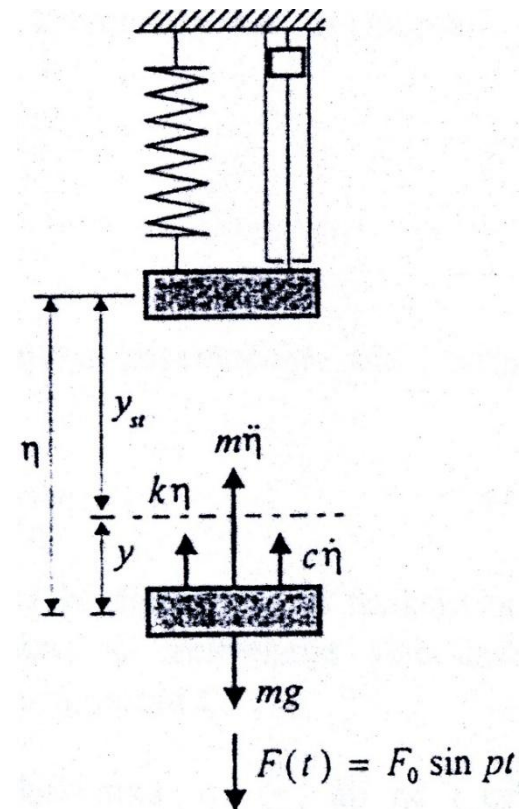
$$\varepsilon = \frac{c}{2m}$$

- Diferencijalna jednačina prinudnih prigušenih vibracija

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin(pt)$$

$F_0$  – amplituda sile

$p$  – kružna frekvencija sile



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

- Opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine kretanja glasi ( $\zeta < 1$ )

Komentari:

$$y(t) = y_h + y_p = e^{-\varepsilon t} (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) + N_p \sin(pt - \varphi)$$

- **Homogeni deo rešenja** se pretpostavlja kao i u slučaju slobodnih prigušenih vibracija
- **Partikularni deo rešenja** pretpostavlja da se prinudne prigušene vibracije vrše sa konstantnom amplitudom  $N_p$ , da je njihova kružna frekvencija identična kružnoj frekvenciji  $p$  poremećajne sile i da postoji fazno kašnjenje  $\varphi$  pomeranja u odnosu na poremećajnu silu

- Izvod po vremenu glasi

$$\dot{y}(t) = -\varepsilon e^{-\varepsilon t} (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) + \omega_d e^{-\varepsilon t} (A \cos(\omega_d t) - B \sin(\omega_d t)) + p N_p \cos(pt - \varphi)$$

- Primenom početnih uslova  $y(0) = y_0$  i  $\dot{y}(0) = v_0$  sledi

$$y(0) = y_0 = B + N_p \sin(-\varphi) \Rightarrow B = y_0 - N_p \sin(-\varphi)$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = -\varepsilon B + \omega_d A + p N_p \cos(-\varphi) \Rightarrow A = \frac{1}{\omega_d} [v_0 + \varepsilon y_0 - \varepsilon N_p \sin(-\varphi) - p N_p \cos(-\varphi)]$$

- Smenom  $A$  i  $B$  u opšte rešenje sledi

$$y(t) = e^{-\varepsilon t} \left( \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + y_0 \cos(\omega_d t) \right) - e^{-\varepsilon t} \left( N_p \sin(-\varphi) \cos(\omega_d t) + \frac{N_p}{\omega_d} [\varepsilon \sin(-\varphi) + p \cos(-\varphi)] \sin(\omega_d t) \right) + N_p \sin(pt - \varphi)$$

Slobodne prigušene vibracije usled početnih uslova

Prigušene vibracije koje imaju kružnu frekvenciju  $\omega_d$  i rezultat su poremećajne sile

Čisto prinudne vibracije koje određuju karakter kretanja

Prvi i drugi sabirak u rešenju se kroz vreme brzo priguše

Prolazni odgovor; Transient Response

Ustaljeni odgovor  
Steady-State Response



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila**
  - **Prolazni odgovor se brzo priguši pa može da se zanemari**

$$y(t) = N_p \sin(pt - \varphi)$$

Komentar:

Partikularni deo rešenja je usvojen  
da bude sinhron poremećajnoj sili

- gde je  $N_p$  amplituda pomeranja i  $\varphi$  fazno kašnjenje pomeranja u odnosu na poremećajnu silu (ugao fazne razlike)
- Izvodi po vremenu glase  $\dot{y}(t) = pN_p \cos(pt - \varphi)$   $\ddot{y}(t) = -p^2 N_p \sin(pt - \varphi)$
- Uvrštavanjem prethodnih izraza u diferencijalnu jednačinu kretanja sledi  $-p^2 N_p \sin(pt - \varphi) + 2\varepsilon p N_p \cos(pt - \varphi) + \omega^2 N_p \sin(pt - \varphi) = (F_0/m) \sin(pt)$ 
  - odnosno nakon sređivanja

$$N_p(\omega^2 - p^2)(\sin(pt)\cos(\varphi) - \cos(pt)\sin(\varphi)) + 2\varepsilon p N_p(\cos(pt)\cos(\varphi) + \sin(pt)\sin(\varphi)) = (F_0/m)\sin(pt)$$

$$[N_p(\omega^2 - p^2)\cos(\varphi) + 2\varepsilon p N_p \sin(\varphi) - (F_0/m)]\sin(pt) + [-N_p(\omega^2 - p^2)\sin(\varphi) + 2\varepsilon p N_p \cos(\varphi)]\cos(pt) = 0$$

- Prethodna trigonometrijska jednačina je zadovoljena ako je ispunjeno

$$N_p(\omega^2 - p^2)\cos(\varphi) + 2\varepsilon p N_p \sin(\varphi) = \frac{F_0}{m}$$

$$-N_p(\omega^2 - p^2)\sin(\varphi) + 2\varepsilon p N_p \cos(\varphi) = 0$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

- Kvadriranjem i sabiranjem prethodne dve jednačine dobija se izraz za određivanje amplitude

$$N_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}$$

- Ugao fazne razlike  $\varphi$  određuje se na sledeći način

$$-N_p(\omega^2 - p^2)\sin(\varphi) + 2\varepsilon p N_p \cos(\varphi) = 0 \quad / \cos(\varphi) \Rightarrow \mathbf{tg}(\varphi) = \frac{2\varepsilon p}{\omega^2 - p^2}$$

- Izraz za amplitudu pomeranja može da se napiše i na sledeći način

$$m = \frac{k}{\omega^2} \quad \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k} \omega^2 = N_{p(st.)} \omega^2 \quad N_p = N_{p(st.)} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}} = N_{p(st.)} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2 \eta^2}}$$

$$\eta = \frac{p}{\omega} \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{\omega} \quad N_{p(st.)} = \frac{P_0}{k}$$

- Sada ustaljeni odgovor može da se napiše u sledećem obliku

$$\mathbf{y(t)} = N_{p(st.)} \frac{\sin(pt - \varphi)}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2 \eta^2}} \quad \mathbf{tg}(\varphi) = \frac{2\eta\zeta}{1 - \eta^2}$$

- gde je  $\eta = p/\omega$  količnik između kružne frekvencije poremećajne sile i kružne frekvencije slobodnih neprigušenih vibracija (tkz. koeficijent poremećaja (frequency ratio))

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

- Između maksimalnog dinamičkog i maksimalnog statičkog odgovora postoji odnos koji se naziva **dinamički koeficijent (dinamički faktor; dynamic factor)**

$$\lambda = \frac{N_p}{N_{p(st.)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}$$

- Ako pretpostavimo da dinamički koeficijent zavisi samo od promene  $\eta$  (**konstantno prigušenje  $\zeta$** ) ekstremnu vrednost dobijamo na sledeći način

$$\frac{d\lambda}{d\eta} = 0 \Rightarrow \eta_{\text{ext}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (\text{„Malo“ pomeren „u levu stranu“ od } \eta = 1)$$

- odnosno maksimum dinamičkog koeficijenta glasi

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

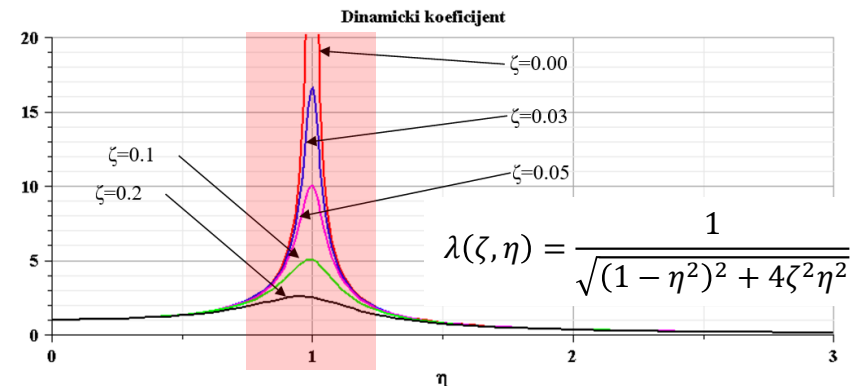
- **Ekstremi dinamičkog odgovora:**  $Z_{\text{din}} = Z_{\text{st},G} \pm \lambda Z_{\text{st},P_0}$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

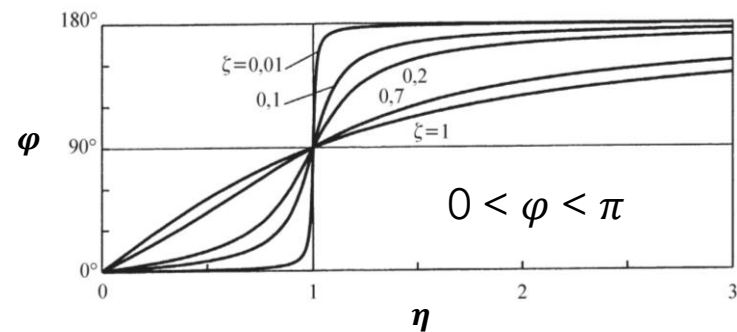
Promena dinamičkog koeficijenta u zavisnosti od  $\eta$  i relativnog prigušenja  $\zeta$

- U području rezonancije sila prigušenja značajno utiče na vrednost dinamičkog koeficijenta
- **Oblast velikih vrednosti dinamičkog koeficijenta treba izbegavati:  $0.75 < \eta < 1.25$**
- $\lambda(0,00,\eta) = 1 \Rightarrow \eta = \sqrt{2} \dots \lambda(0,20,\eta) = 1 \Rightarrow \eta = 1,356$



Promena ugla fazne razlike  $\varphi$  u zavisnosti od količnika  $p/\omega$  i relativnog prigušenja  $\zeta$

- Za  $\zeta = 0$  fazna razlika ima vrednost nula ili  $\pi$
- Za  $\eta = 1$  sledi da je  $\tan \varphi = \infty$ , tj. fazna razlika ima vrednost  $\pi/2$ , odnosno sve krive na slici prolaze kroz tačku čija je apscisa  $\eta = 1$ , a ordinata  $\varphi = 90^\circ$  i asimptotski se približavaju pravcu  $\varphi = \pi$
- Uočava se znatna promena fazne razlike  $\varphi$  u zoni gde je  $\eta \approx 1$
- U području rezonancije sile prigušenja značajno utiču na vrednost fazne razlike



Za  $\zeta = 0$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \eta < 1 \\ \pi/2 & \eta = 1 \\ \pi & \eta > 1 \end{cases}$$

Za  $\zeta > 0$

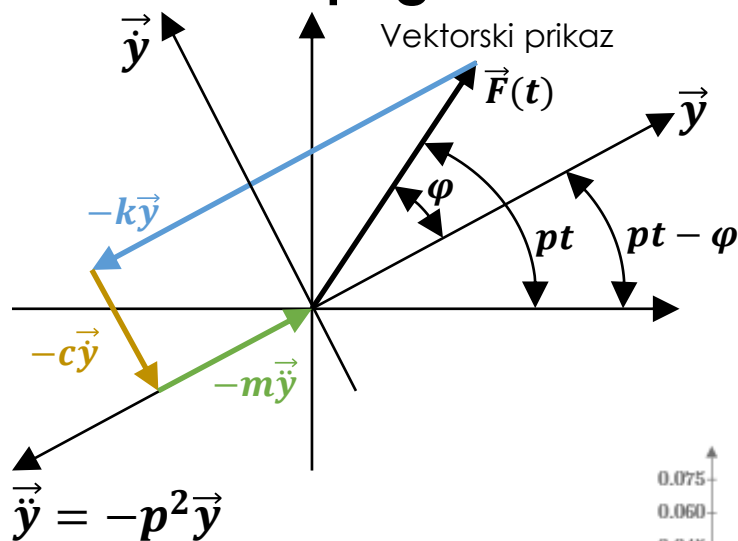
$$\varphi = \begin{cases} 0 < \varphi < \pi/2 & \eta < 1 \\ \pi/2 & \eta = 1 \\ \pi/2 < \varphi < \pi & \eta > 1 \end{cases}$$

Za  $\zeta > 0$

Ako je  $\eta > 1$  sledi  $\varphi < 0$   
 $\varphi = \varphi + \pi$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila



Komentar:  
Extrem može da se javi i  
pre ustaljenog odgovora

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

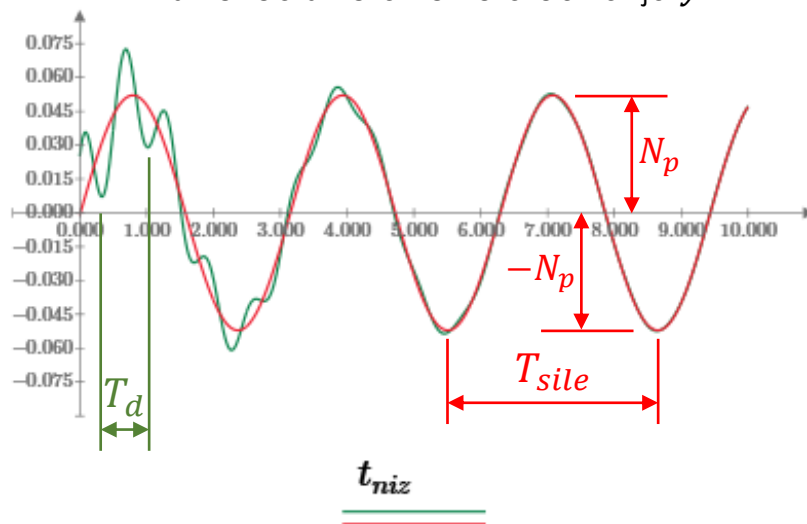
$$F(t) = F_0 \sin(pt)$$

$$y(t) = N_p \sin(pt - \varphi)$$

$$\dot{y}(t) = pN_p \cos(pt - \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = -p^2 N_p \sin(pt - \varphi)$$

- Pomeranje  $\vec{y}$  kasni u odnosu na harmonijsku silu  $\vec{F}(t)$  za ugao  $\varphi$
- Elastična sila  $-k\vec{y}$  uvek je suprotnog smera od pomeranja  $\vec{y}$
- Sila prigušenja  $-c\dot{\vec{y}}$  za  $90^\circ$  kasni iza pomeranja i uvek je suprotnog smera od smera vektora brzine  $\dot{\vec{y}}$
- Inercijalna sila  $-m\ddot{\vec{y}}$  je u fazi sa pomerenjem  $\vec{y}$  i ima suprotan smer od smera vektora ubrzanja  $\ddot{\vec{y}}$



$$y_1(t_{niz})$$

$$y_{steady\_state\_1}(t_{niz})$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

### ■ Drugi oblik... Ustaljeni odgovor

- Pretpostavimo partikularno rešenje u sledećem obliku

$$y_p = C \sin(pt) + D \cos(pt)$$

- Unoseći  $y_p$  u  $\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin(pt)$  sledi

Komentar

Kod prigušenih sistema odgovor nije u fazi sa opterećenjem pa je potreban u rešenju i kosinus

$$-Cp^2 \sin(pt) - Dp^2 \cos(pt) + 2\zeta\omega(Cp \cos(pt) - Dp \sin(pt)) + \omega^2(C \sin(pt) + D \cos(pt)) = \frac{F_0}{m} \sin(pt)$$

- Razvijanjem prethodnog izraza i grupisanjem članova uz  $\sin(pt)$  i  $\cos(pt)$  sledi

$$\left[ C(\omega^2 - p^2) - 2\zeta\omega p D - \frac{F_0}{m} \right] \sin(pt) + [2\zeta\omega p C + D(\omega^2 - p^2)] \cos(pt) = 0 / \cdot \frac{1}{\omega^2} \quad (k = m\omega^2; \eta = \frac{p}{\omega})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_0}{k} &= C[1 - \eta^2] - D[2\zeta\eta] \\ 0 &= C[2\zeta\eta] + D[1 - \eta^2] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{F_0}{k} \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} \\ D &= \frac{F_0}{k} \frac{-2\eta\zeta}{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} \end{aligned} \right.$$

- Sada jednačina kretanja ustaljenog odgovora ima oblik

$$y_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} [(1 - \eta^2)\sin(pt) - 2\eta\zeta\cos(pt)]$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene vibracije – harmonijska sila

- Do prethodnog izraza može da se dođe polazeći od veze

$$y(t) = N_p \sin(pt - \varphi) = N_p (\sin(pt)\cos(\varphi) - \cos(pt)\sin(\varphi))$$

Komentari:

- Znak zavisi od kvadranta
- $0 < \varphi < \pi$ ; znak  $\varphi$ , tj.  $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2}$  zavisi od znaka  $1 - \eta^2$  pa sledi:
  - $\eta < 1 \Rightarrow 1 - \eta^2 > 0 \Rightarrow 0 < \varphi < \pi/2$
  - $\eta > 1 \Rightarrow 1 - \eta^2 < 0 \Rightarrow \pi/2 < \varphi < \pi$

$$\cos(\varphi) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi)}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi)}} = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}$$

$$\sin(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi)\cos(\varphi)$$

Komentar:

- $0 < \varphi < \pi$  (sinus je pozitivan u oba kvadranta)

$$\sin(\varphi) = \frac{2\eta\zeta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}$$

$$y(t) = N_p \left( \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \sin(pt) - \frac{2\eta\zeta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}} \cos(pt) \right) \quad N_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2}}$$

$$y_p = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + 4\zeta^2\eta^2} [(1 - \eta^2)\sin(pt) - 2\eta\zeta\cos(pt)]$$

Komentar:

„Problem“ sa predznakom  $\operatorname{arctg}(\frac{2\eta\zeta}{1-\eta^2})$  nestaje jer je faza „ugrađena“ u kombinaciju sinusa i kosinusa

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne vibracije – harmonijska sila

### ■ Svojstva prinudnih vibracija

- **Amplituda ustaljenih vibracija** ne zavisi od početnih uslova
- **Prinudne vibracije se ne amortizuju** kroz vreme pri postojanju prigušenja
- **Frekvencija prinudnih vibracija jednaka je frekvenciji prinudne sile** i ne zavisi od karakteristika sistema koji vibrira, tj. prinudna sila „nameće” sistemu svoju frekvenciju
- **Kod prinudnih vibracija promena režima kretanja može da se izvrši promenom osnovnih parametara sistema (masa, krutost, prigušenje)**
- Ako su kružna frekvencija sile i svojstvena kružna frekvencija sistema bliske (iste ako nema prigušenja) nastupa stanje **rezonancije**. Maksimalni dinamički odgovor sistema izrazito je veći od maksimalnog statičkog odgovora usled harmonijske sile. **Pomeranje se kontroliše prigušenjem**, tj. za različita prigušenja bitno se razlikuje odgovor sistema
- **Pri maloj vrednosti amplitude prinudne sile mogu da nastanu veoma značajne prinudne vibracije** ukoliko su frekvencija prinudne sile i svojstvena kružna frekvencija sistema bliske (iste ako nema prigušenja) zbog pojave rezonancije...
- **Pri velikoj vrednosti amplitude prinudne sile prinudne vibracije mogu da budu vrlo male** ako je kružna frekvencija sile mnogo veća od svojstvene kružne frekvencije sistema...

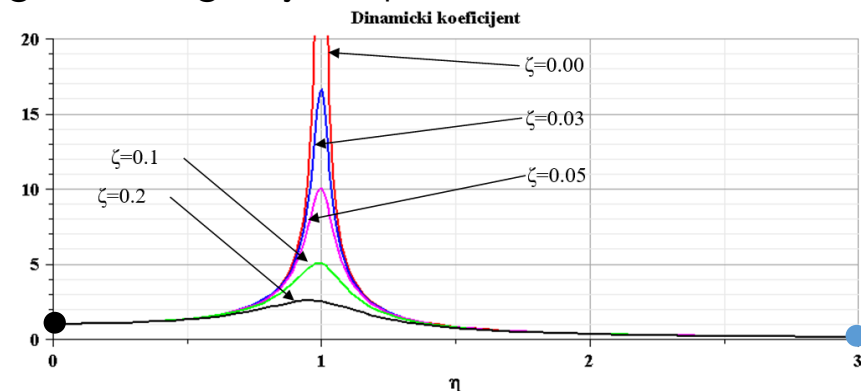


# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne vibracije – harmonijska sila

### ■ Svojstva prinudnih vibracija

- ... ako je kružna frekvencija poremećajne sile mnogo veća u odnosu na kružnu frekvenciju sistema ( $p \gg \omega$ ; **brza promena sile; plava tačka na slici**) dinamički koeficijent teži nuli. Amplituda prinudnih vibracija opada sa povećanjem odnosa  $\eta = p/\omega$  za  $p > \omega$  i za  $p \gg \omega$  teži nuli i manja je od amplitude pri statičkom dejstvu sile. Prigušenje ima veoma mali uticaj (za različita prigušenja pomeranje je praktično isto). Ovo je bitno svojstvo jer ukazuje na mogućnost da se prinudne vibracije i pored dejstva sile odstrane. **Pomeranje se kontroliše masom**
- ... ako je kružna frekvencija poremećajne sile mala u odnosu na kružnu frekvenciju sistema ( $p \ll \omega$ ; **spora promena sile; crna tačka na slici**) dinamički koeficijent se približava jedinici. Amplituda prinudnih vibracija praktično je jednaka amplitudi usled maksimalnog statičkog dejstva prinudne sile. Prigušenje ima veoma mali uticaj (za različita prigušenja pomeranje je praktično isto). **Pomeranje se kontroliše krutošću**



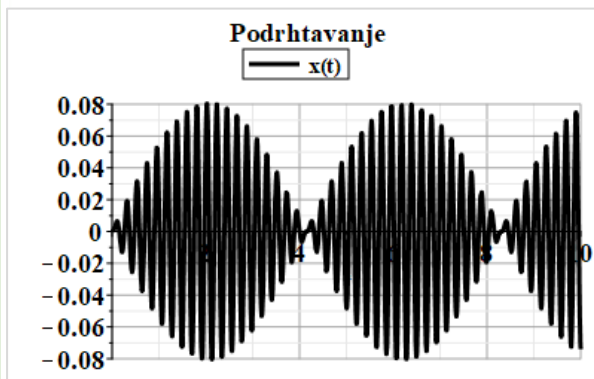
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne vibracije – harmonijska sila

Ako je  $\omega$  „približno isto“ sa  $p$  ( $\eta_{ext} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ) ugao  $\varphi$  je praktično jednak  $\pi/2$  za sva prigušenja i nastupa **rezonancija** pri kojoj pomeranje dostiže ekstremnu vrednost, tj. značajnije je veće od statičkog pomeranja usled amplitude poremećajne sile. **Pomeranje se kontrolise prigušenjem. Oblasť velikih vrednosti dinamičkog koeficijenta  $0.75 < \eta = p/\omega < 1.25$ , tkz. područje rezonancije (treba izbegavati)**

### Podrhtavanje

Ako je  $\omega$  „blisko“  $p$  bez prigušenja



Rezonancija bez prigušenja - homogeni početni uslovi

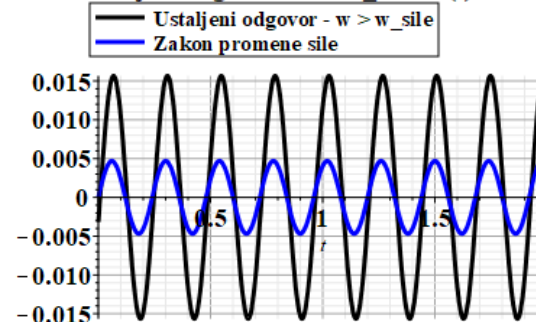


### Ako je $\omega > p$

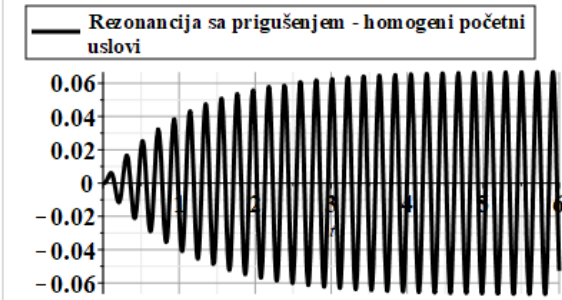
Sila i pomeranje ustaljenog odgovora su u istoj fazi

Pomeranje ustaljenog odgovora i sila su istog smera

Ustaljeni odgovor -  $w > w_{sile}$  -  $x(t)$



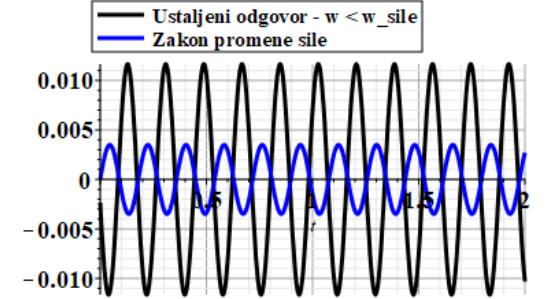
Rezonancija sa prigušenjem - homogeni početni uslovi



### Ako je $\omega < p$

Pomeranje ustaljenog odgovora i sila su suprotnog smera

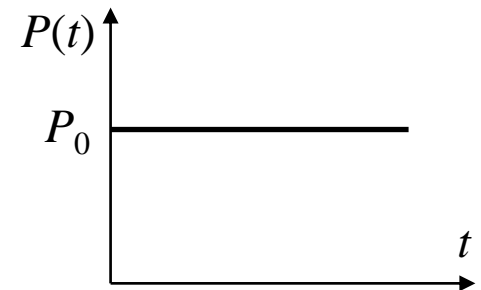
Ustaljeni odgovor -  $w < w_{sile}$  -  $x(t)$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Prinudne neprigušene vibracije – naglo naneta konstantna sila**
  - Naglo naneta sila može da se predstavi Heaviside-ovom funkcijom

$$P(t) = P_0 H(t) \quad H(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{za } t > 0 \\ 0.0 & \text{za } t = 0 \end{cases}$$



- Diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = P(t) = P_0$$

- Nakon deljenja diferencijalne jednačine kretanja sa  $m$  i uvođenjem izraza

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{P_0}{m} = \frac{P_0}{k} \frac{k}{m} = y_{st} \omega^2$$

- dobija se diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = y_{st} \omega^2$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne neprigušene vibracije – naglo naneta konstantna sila

- Rešenje diferencijalne jednačine kretanja traži se u sledećem obliku

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + y_{st}$$

- Početni uslovi glase  $y(0) = y_0 = 0$  i  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0 = 0$
- Uvođenjem opšteg rešenja u početne uslove određuju se integracione konstante

$$B = -y_{st} \quad A = 0$$

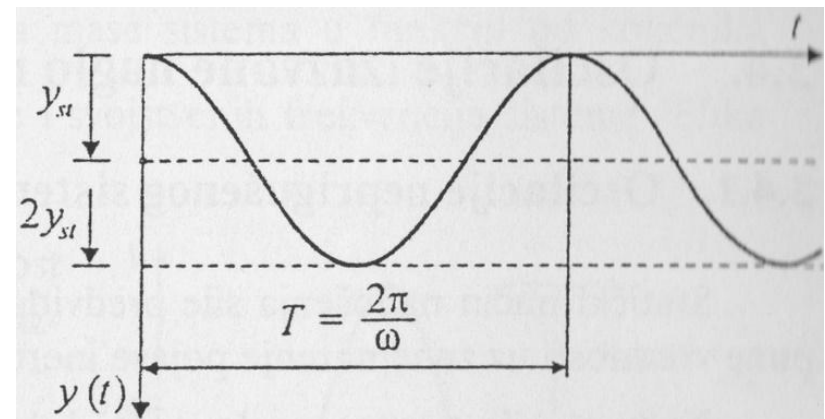
- Rešenje glasi

$$y(t) = y_{st}(1 - \cos(\omega t))$$

- Dinamički faktor glasi

$$\lambda(t) = \frac{y(t)}{y_{st}} = 1 - \cos(\omega t)$$

- pri čemu je maksimalna vrednost dinamičkog faktora  $\lambda_{max} = 2$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene ( $\zeta < 1$ ) vibracije – naglo naneta konstantna sila

- Diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 y_{st}$$

- Opšte rešenje ima oblik

$$y(t) = Ce^{-\zeta\omega t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega t + \alpha) + y_{st}$$

- Početni uslovi

$$y(0) = y_0 = 0 \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0 = 0$$

- Unoseći opšte rešenje u početne uslove određuju se integracione konstante

$$y(t=0) = y_{st} + C\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow C = -\frac{y_{st}}{\sin(\alpha)}$$

$$\dot{y}(t) = -\zeta\omega Ce^{-\zeta\omega t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega t + \alpha) + \sqrt{1 - \zeta^2}\omega C e^{-\zeta\omega t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega t + \alpha)$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene ( $\zeta < 1$ ) vibracije – naglo naneta konstantna sila

- Unoseći opšte rešenje u početne uslove određuju se integracione konstante

$$\dot{y}(t = 0) = \zeta\omega C \sin(\alpha) + \sqrt{1 - \zeta^2}\omega C \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \cos(\alpha) = \zeta$$

$$C = -\frac{y_{st}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Sada konačna jednačina kretanja ima oblik

$$y(t) = y_{st} \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega t + \alpha) \right]$$

- odnosno

$$y(t) = P_0 h(t)$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne prigušene ( $\zeta < 1$ ) vibracije – naglo naneta konstantna sila

■ gde je  $h(t)$  **udarni koeficijent** 
$$h(t) = \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega t + \alpha) \right]$$

■ Extremna vrednost udarnog koeficijenta  $h_{max}$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{k} \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\zeta\omega \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega t + \alpha) - \sqrt{1-\zeta^2}\omega \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega t + \alpha)] = 0$$

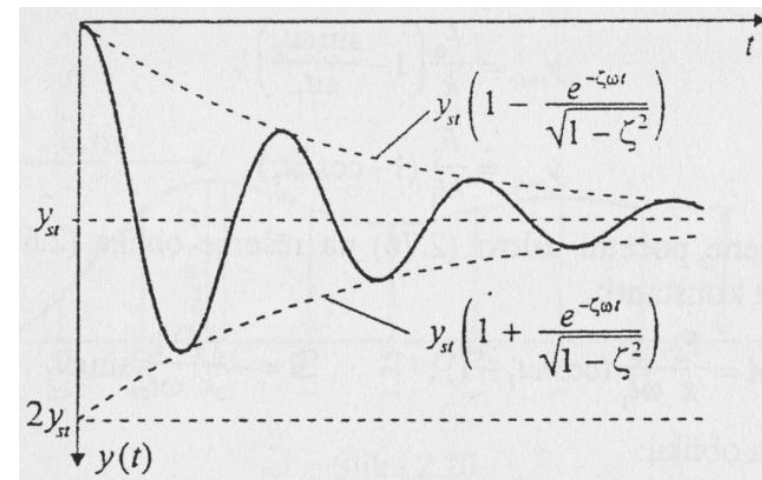
$$tg(\sqrt{1-\zeta^2}\omega t + \alpha) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = tg(\alpha) \Rightarrow \sqrt{1-\zeta^2}\omega t_i = i\pi$$

$$t_i = \frac{i\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega}$$

$$h_{max} = \frac{1}{k} \left( 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right)$$

■ **Dinamički faktor**  
(menja se tokom vremena)

$$\lambda(t) = kh(t)$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

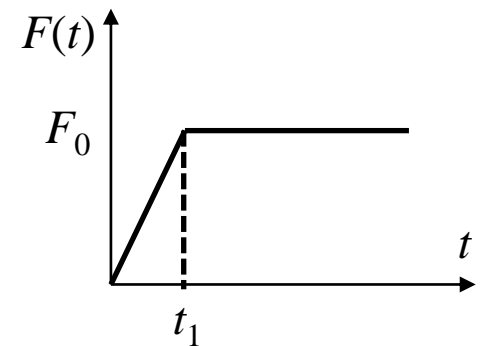
## ■ Prinudne neprigušene vibracije – uticaj brzine porasta sile

- Diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{y} + ky = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \frac{t}{t_1} \quad \text{za } t \leq t_1$$

$$F(t) = F_0 \quad \text{za } t \geq t_1$$



- **Faza 1:  $t \leq t_1$**

$$y_p = \frac{F_0}{k} \frac{t}{t_1}$$

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} \frac{t}{t_1}$$

- Primenom početnih uslova ( $y(0) = y_0 = 0$ ;  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0 = 0$ ) sledi

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \left( \frac{t}{t_1} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t_1} \right)$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne neprigušene vibracije – uticaj brzine porasta sile

### ■ Faza 2: $t \geq t_1$

- Primenom početnih uslova

$$y(t_1) = \frac{F_0}{k} \left( 1 - \frac{\sin(\omega t_1)}{\omega t_1} \right) \quad \dot{y}(t_1) = \frac{F_0}{k t_1} (1 - \cos(\omega t_1))$$

- na opšte rešenje

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + y_{st}$$

- sledi

$$A = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\omega t_1} (\cos(\omega t_1) - 1) \quad B = -\frac{F_0}{k} \frac{1}{\omega t_1} \sin(\omega t_1)$$

- tj., dobija se rešenje u obliku

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega t_1} [\sin(\omega(t - t_1)) - \sin(\omega t)] \right\}$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

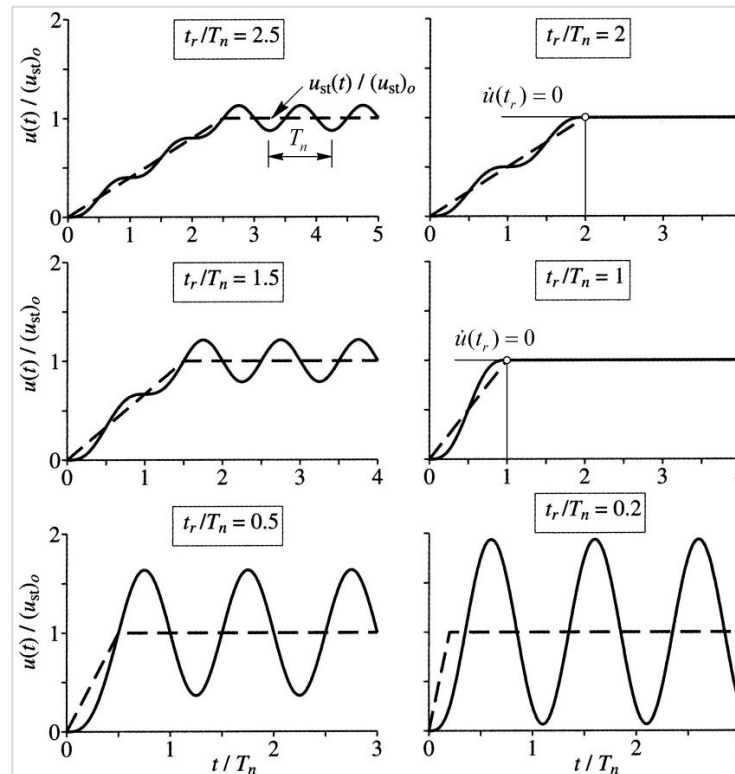
## ■ Prinudne neprigušene vibracije – uticaj brzine porasta sile

- Maksimalno pomeranje zavisi od proizvoda  $\omega t_1$ , pri čemu je  $\omega t_1 = \frac{2\pi t_1}{T}$ 
  - odnosno pri maloj vrednosti  $\omega t_1$  porast sile je brz i obrnuto

Normalizovano pomeranje  $\frac{y(t)}{y_{st}}$  ( $y_{st} = \frac{F_0}{k}$ ) je u funkciji normalizovanog vremena  $t/T$  jer je  $\omega t = 2\pi(t/T)$ . Ova funkcija zavisi od količnika  $t_1/T$

**Za manje vrednosti  $t_1/T$  („brz“ prirast sile)** odgovor postaje sličan odgovoru pri naglo nanetoj sili

**Za veće vrednosti  $t_1/T$  („spor“ prirast sile)** dinamička pomeranja postaju bliska statičkim, tj. dinamički efekti su mali

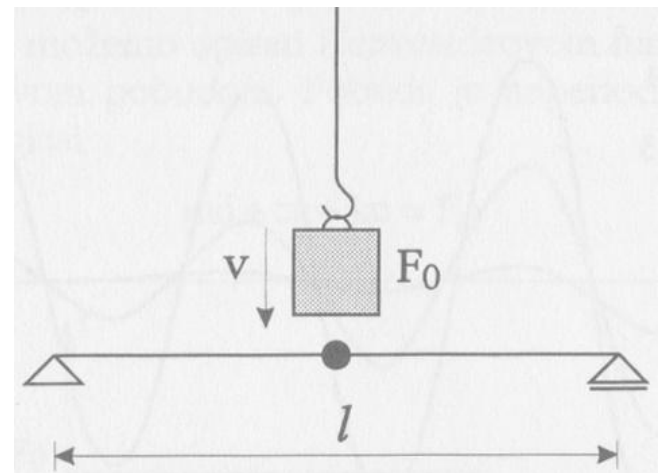
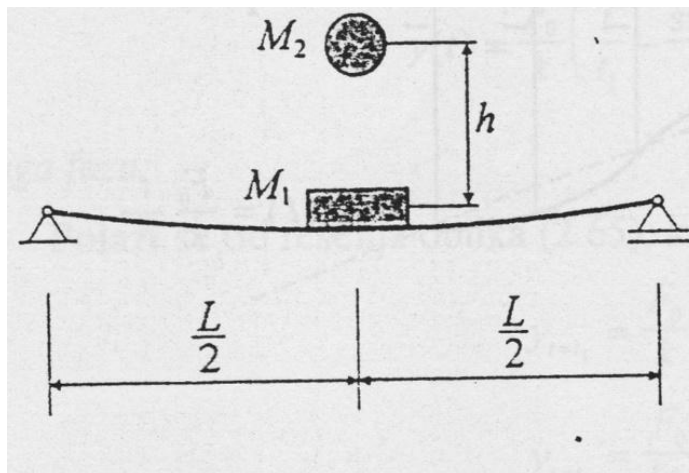


### Ponašanje sistema:

- Sistem vibrira oko statičkog ravnotežnog položaja sa svojstvenim periodom  $T$  tokom rasta sile kao i tokom njenog konstantnog dejstva
- Ako je  $\dot{y}(t_1) = 0$  ( $\frac{t_1}{T} = 1, 2, 3, \dots$ ) sistem ne vibrira za  $t \geq t_1$
- Za  $t_1 < \frac{T}{4} \Rightarrow y_{max} \approx 2y_{st}$  pa se sistem ponaša kao da je izložen naglo nanetoj sili
- Za  $t_1 > 3T \Rightarrow y_{max} \approx y_{st}$  pa se sistem ponaša kao da je izložen statičkom dejstvu sile

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Prinudne vibracije – naglo naneta konstantna sila – udar**
  - **Udar padom ili spuštanjem tereta**
    - **Idealno plastičan (tj. apsolutno ili potpuno neelastičan)** udar (nakon udara teret i greda nastavljaju da se kreću zajedno, tj. brzina na kraju udara je ista za teret i deo grede u kontaktu sa teretom)
    - U trenutku udara samo u tački dodira brzina tereta i grede je ista, pri čemu ostale tačke grede imaju međusobno različite brzine pa se u analizi ne uzima ukupna masa grede već izvesna tzv. redukovana masa pri određivanju brzine nakon udara
    - Greda je u stanju mirovanja pre udara



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Prinudne vibracije – naglo naneta konstantna sila – udar

### ■ Udar padom ili spuštanjem tereta (plastičan udar)

- Primjenjuje se rešenje za naglo nanetu konstantnu silu

- Bez prigušenja:  $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} (1 - \cos(\omega t))$

- Sa prigušenjem ( $\zeta < 1$ ):

$$y(t) = e^{-\zeta \omega t} \left( \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + y_0 \cos(\omega_d t) \right) + \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega t + \alpha) \right]$$

- Brzina na početku udara je  $v$  (ako telo slobodno pada bez početne brzine i sa zanemarenjem otpora vazduha sledi  $v = \sqrt{2gh}$  gde je  $h$  visina pada)
- Kod idealno plastičnog udara važi jednakost količine kretanja pre i posle udara

$$M_2 v = v_0 (M_1 + M_2) \Rightarrow v_0 = M_2 v / (M_1 + M_2)$$

- gde je  $M_1$  masa grede u dinamičkoj analizi ( $\sim 1/2$  ukupne mase grede),  $M_2$  je masa tereta koji ili pada ili se spušta i  $v_0$  brzina neposredno nakon udara
- Intenzitet naglo nanete sile  $F_0 = M_2 g$
- Pomeranje se meri u odnosu na statički ravnotežni položaj neposredno pre udara
- U analizama se smatra se da je početno pomeranje  $y_0 = 0$
- Svojstvena kružna frekvencija  $\omega = \sqrt{k / (M_1 + M_2)}$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Kratkotrajni impuls – nagla promena brzine bez promene položaja

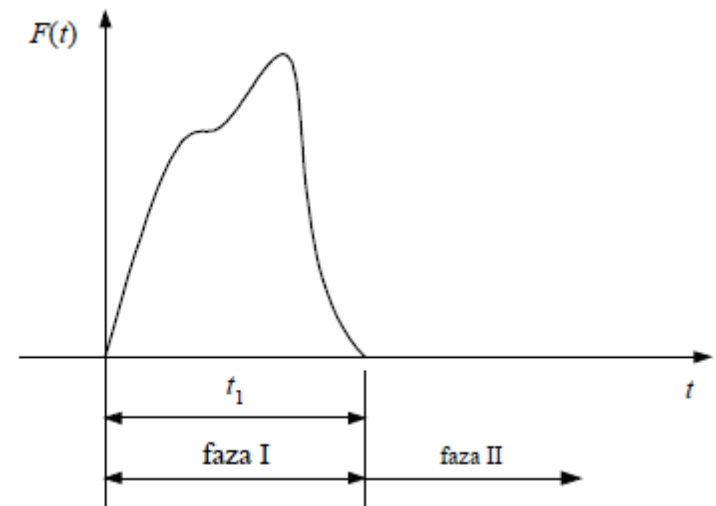
- Pri relativno dugom trajanju opterećenja  $t_1$  ( $t_1 > 0,25T$ ) maksimalno pomeranje prvenstveno zavisi vremenske funkcije sile, a ne od trajanja i odgovor sistema se odvija u fazi I
- Pri relativno kratkom trajanju opterećenja  $t_1$  ( $t_1 < 0,25T$ ) maksimalno pomeranje zavisi prvenstveno od intenziteta impulsa, a ne od njegovog oblika i odgovor će se odvijati u fazi II, tj. u trenutku nakon prestanka dejstva sile

- Intenzitet impulsa  $I = \int_0^{t_1} F(t) dt$

- Diferencijalna jednačina slobodnih prigušenih vibracija (nakon prestanka impulsa)

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

- Rešenje  $y(t) = Ce^{-\varepsilon t} \sin(\omega_d t + \alpha)$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Kratkotrajni impuls – nagla promena brzine bez promene položaja

- Početni uslovi

$$y(0) = 0 \text{ i } m\dot{y}(0) = m\dot{y}_0 = mv_0 = I$$

- Izraz za brzinu glasi

$$\dot{y}(t) = Ce^{-\varepsilon t}[-\varepsilon \sin(\omega_d t + \alpha) + \omega_d \cos(\omega_d t + \alpha)]$$

- Primenom početnih uslova određuju se konstante

$$C \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \qquad C \omega_d = \frac{I}{m} \Rightarrow C = \frac{I}{m \omega_d}$$

- Rešenje glasi

$$y(t) = \frac{I}{m \omega_d} e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t)$$

- odnosno ako nema prigušenja

$$y(t) = \frac{I}{m \omega} \sin(\omega t)$$

Komentar:

Promena vektora količine kretanja za neki interval vremena jednaka je impulsu sile koji deluje na tu tačku u tom intervalu

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Kratkotrajni impuls – nagla promena brzine bez promene položaja**

- Izrazi

$$y(t) = \frac{I}{m\omega} \sin(\omega t) \qquad y(t) = \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t)$$

- mogu da se napišu na sledeći način

$$\mathbf{y(t) = I g(t)}$$

- gde je uvedena oznaka za reagovanje sistema na jedinični impuls

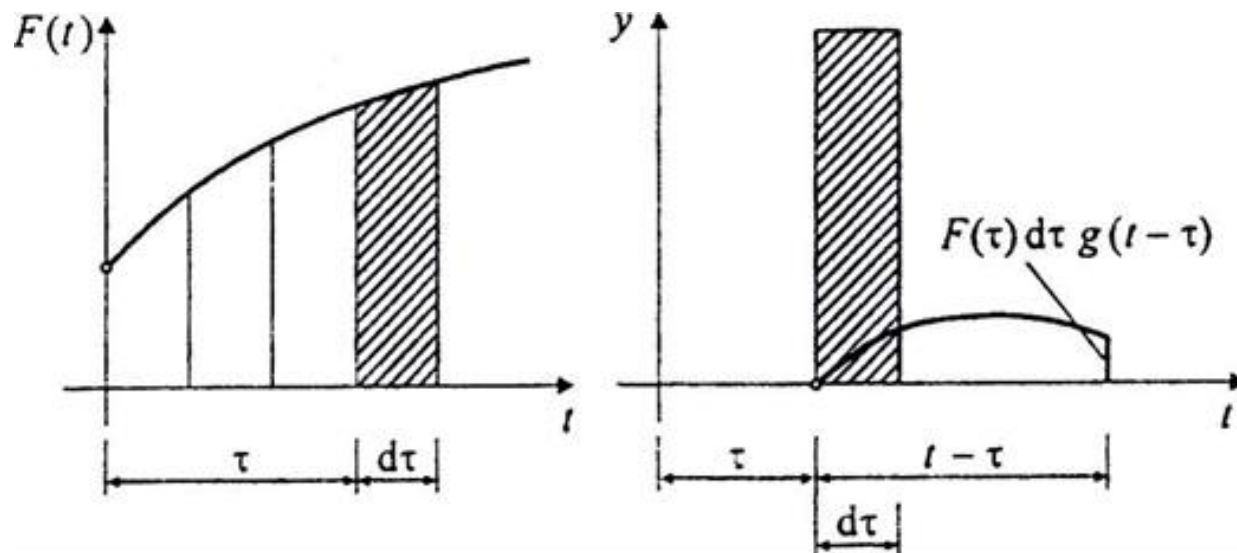
- bez prigušenja  $\mathbf{g(t) = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)}$

- sa prigušenjem  $\mathbf{g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t)}$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Proizvoljno promenljiva sila – Duhamel-ov integral

- Reagovanje sistema na dejstvo jediničnog impulsa može da se prikaže preko funkcije  $g(t)$
- Dejstvo proizvoljno promenljivog opterećenja  $F(t)$  može da se predstavi kao niz impulsa
- U trenutku  $\tau$  deluje impuls  $I = F(\tau)\Delta\tau$ , a njegov uticaj u trenutku  $t$  može da se odredi proizvodom impulsa  $F(\tau)\Delta\tau$  sa funkcijom  $g(t - \tau)$





# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Proizvoljno promenljiva sila – Duhamel-ov integral

- Za linearno ponašanje sistema važi superpozicija, pa dobijamo izraz za ukupno pomeranje u sledećem obliku (integral konvolucije ili integral superpozicije ili Duhamel-ov integral)

$$y(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- Ukoliko postoje početni uslovi jednačina kretanja glasi:
  - bez prigušenja ( $\zeta = 0$ )

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$$

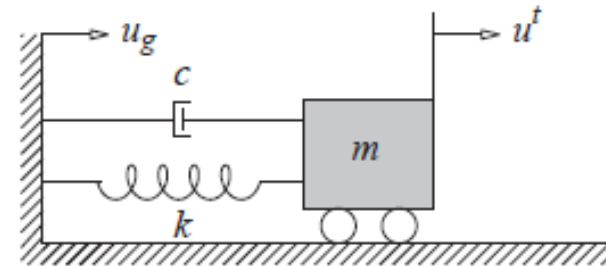
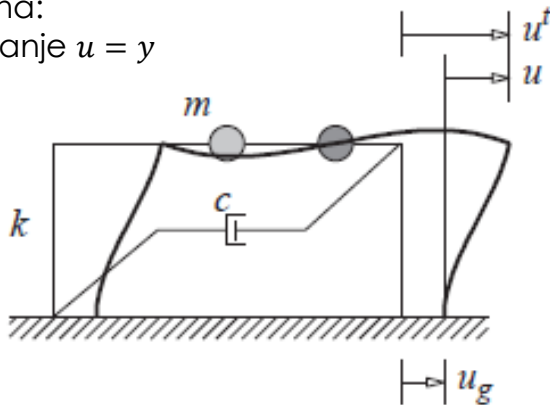
- sa prigušenjem ( $0 < \zeta < 1$ )

$$y(t) = e^{-\zeta\omega t} \left( \frac{v_0 + \zeta\omega y_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + y_0 \cos(\omega_d t) \right) + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

Napomena:  
obeležavanje  $u = y$



- **Inercijalna sila**  $m\ddot{y}^t$  je proporcionalna apsolutnom ubrzanju  $\ddot{y}^t$
- **Sila prigušenja**  $c\dot{y}$  je proporcionalna relativnoj brzini  $\dot{y}$  (unutrašnje viskozno prigušenje)
- **Sila elastičnog otpora** koji pruža konstrukcija u pravcu kretanja mase  $ky$  je proporcionalana relativnom pomeranju  $y$
- Pomeranje konstrukcije kao krutog tela iznosi  $y_g$  (**pomeranje osnove**)
- Efekti pomeranja osnove najčešće se uvode preko vremenskog zapisa ubrzanja tla (**akcelerogram**)

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

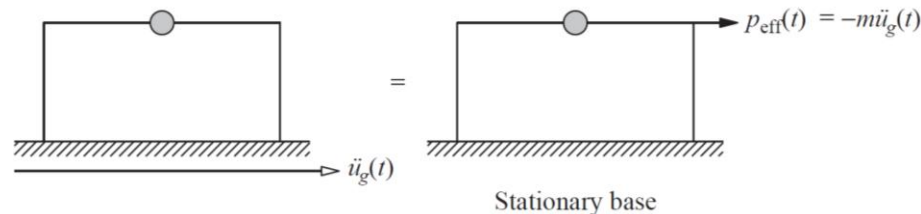
- Ukupno pomeranje u odnosu na početni položaj (apsolutno pomeranje mase)  $y^t = y_g + y$

- Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$m\ddot{y}^t + c(\dot{y}^t - \dot{y}_g) + k(y^t - y_g) = 0 \quad m(\ddot{y}_g + \ddot{y}) + c\dot{y} + ky = 0$$

- i nakon sređivanja sledi

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g = p_{eff} \Rightarrow \ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_g$$



- odnosno **problem se svodi na prinudne prigušene vibracije sistema usled proizvoljno promenljive sile  $p_{eff} = -m\ddot{y}_g$  (tzv. efektivna sila zemljotresa)**

Komentar:

Diferencijalna jednačina kretanja može da se prikaže i na drugi način, tj. u sledećem obliku

$$m\ddot{y}^t + c\dot{y}^t + ky^t = c\dot{y}_g + ky_g$$

koji se, zbog toga što se zemljotresno dejstvo obično zadaje u vidu akceleroograma, retko primenjuje

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

- Kod zemljotresnog dejstva uobičajeno je da se usvoje homogeni početni uslovi i podkritično prigušenje (uobičajeno za građevinske konstrukcije)

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

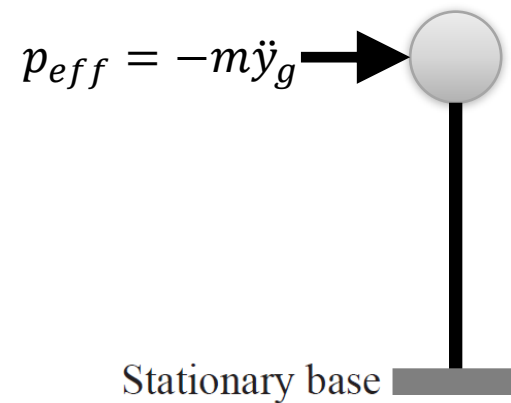
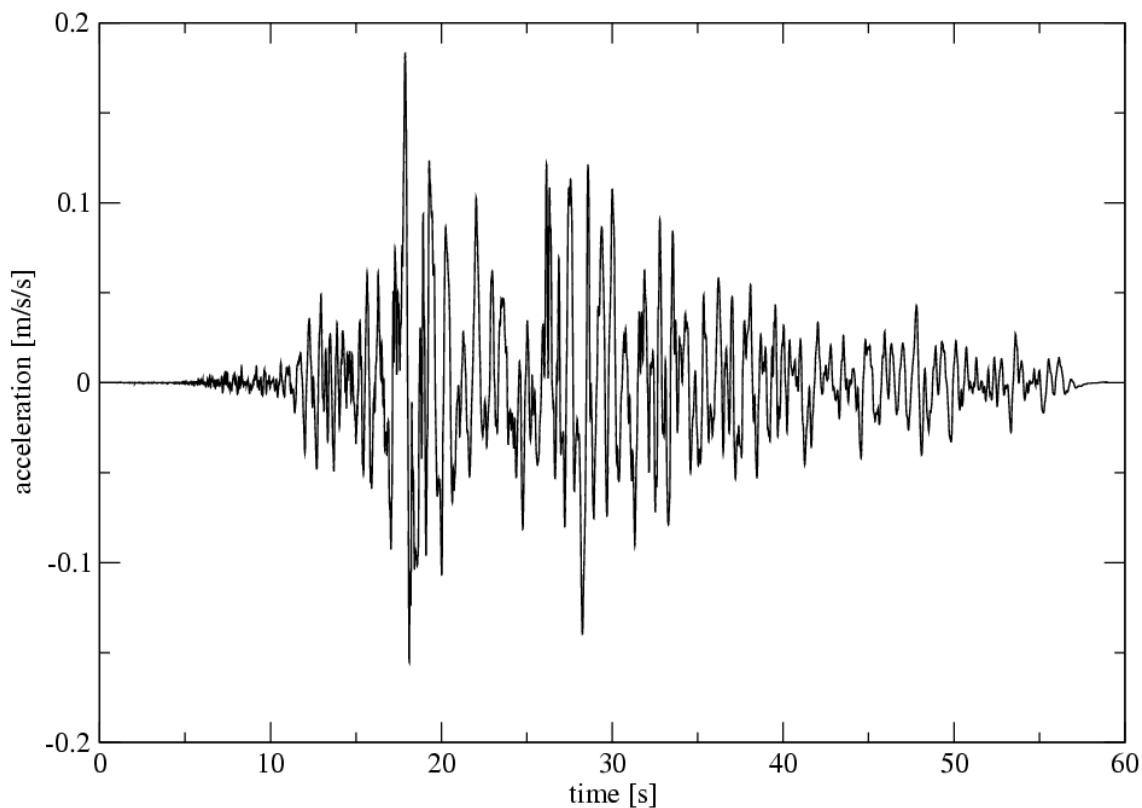
- Rešenje za proizvoljno promenljivu silu  $p_{eff} = -m\ddot{y}_g$  (efektivna sila zemljotresa) može da se odredi primenom Duhamel-ovog integrala

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

- Integral može da se odredi samo ako je dejstvo dato u analitičkom obliku i sa „dovoljno jednostavnom“ funkcijom promene...

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

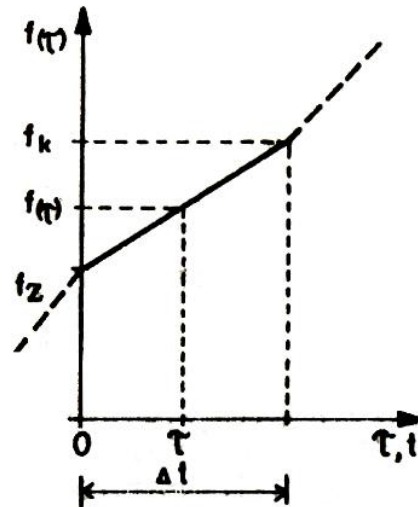
- **Numerička integracija Duhamel-ovog integrala (zemljotres)**
  - ... za zemljotresno dejstvo (akcelerogram) prethodni uslov nije ispunjen ako se posmatra čitava vremenska istorija



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija Duhamel-ovog integrala (zemljotres)

- Ako se ubrzanje tla između dva susedna snimljena podatka aproksimira pravom linijom, a samim tim i promena opterećenja, moguće je rešiti inegral iz prethodne jednačine za zadati akcelorogram



Linearna promena opterećenja  $f$   
po intervalima  $\Delta t$

- Analizirano vreme podeli se na vremenske intervale  $\Delta t$  (koji npr. odgovaraju vremenskim intervalima snimljenih ubrzanja tla tokom zemljotresa)
- Najbolje je za numerički proračun da je vremenska dužina intervala konstantna (ovo odgovara akcelorogramu), mada može biti i promenljiva
- Početno pomeranje i početna brzina za naredni interval odgovaraju pomeranju i brzini na kraju prethodnog intervala

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija Duhamel-ovog integrala (zemljotres)

- Jednačine za pomeranje i brzinu mogu da se napišu na sledeći način (indeks z – početak intervala; indeks k – kraj intervala; f – opterećenje ( $f = -m\ddot{y}_g$ ))

$$y_k = Af_z + Bf_k + Cy_z + D\dot{y}_z \quad \dot{y}_k = A'f_z + B'f_k + C'y_z + D'\dot{y}_z$$

$$\ddot{y}_k = (F_k - c\dot{y}_k - ky_k)/m$$

$$A = \frac{1}{k\omega_d\Delta t} \left\{ e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[ (1 - 2\zeta^2 - \zeta\omega\Delta t)\sin(\omega_d\Delta t) - \left( \frac{2\zeta\omega_d}{\omega} + \omega_d\Delta t \right) \cos(\omega_d\Delta t) \right] + \frac{2\zeta\omega_d}{\omega} \right\}$$

$$B = \frac{1}{k\omega_d\Delta t} \left\{ e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[ -(1 - 2\zeta^2)\sin(\omega_d\Delta t) + \frac{2\zeta\omega_d}{\omega} \cos(\omega_d\Delta t) \right] + \omega_d\Delta t - \frac{2\zeta\omega_d}{\omega} \right\}$$

$$C = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[ \cos(\omega_d\Delta t) + \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) \right] \quad D = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega\Delta t} \sin(\omega_d\Delta t)$$

$$A' = \frac{1}{k\omega_d\Delta t} \{ e^{-\zeta\omega\Delta t} [(\zeta\omega + \omega^2\Delta t)\sin(\omega_d\Delta t) + \omega_d\Delta t\cos(\omega_d\Delta t)] - \omega_d \}$$

$$B' = \frac{1}{k\omega_d\Delta t} [-e^{-\zeta\omega\Delta t} [\zeta\omega\sin(\omega_d\Delta t) + \omega_d\cos(\omega_d\Delta t)] + \omega_d]$$

$$C' = -\frac{\omega^2}{\omega_d} e^{-\zeta\omega\Delta t} \sin(\omega_d\Delta t) \quad D' = e^{-\zeta\omega\Delta t} \left[ \cos(\omega_d\Delta t) - \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d\Delta t) \right]$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija Duhamel-ovog integrala

### ■ Komentari:

- Rešenje može da se primeni za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo  $f$
- Za zemljotresno dejstvo koristi se  $p_{eff} = -m\ddot{y}_g$
- Izračunate vrednosti pomeranja tačne su za dejstvo sastavljeno od linearnih sektora bez obzira na trajanje intervala  $\Delta t$
- Trajanje intervala proračuna  $\Delta t$ , između ostalog, diktira i opterećenje (biće komentarisano kasnije)
- U opštem slučaju tačnost rezultata se poboljšava skraćivanjem trajanja intervala proračuna  $\Delta t$
- Pošto se rešenje pomoću Duhamel-ovog integrala zasniva na superpoziciji metoda se koristi samo za analizu u lineranom području



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

Komentar:

Pretpostavkom o promeni neke veličine (ubrzanja) tokom intervala diferencijalnu jednačinu kretanja pretvaramo u algebarsku i dobijamo rešenja u diskretnim trenucima vremena

## ■ Numerička integracija

### ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem

Integral ubrzanja po intervalu  $\Delta t$  ( $\Delta \dot{y}$ )

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \frac{\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}}{2} \Delta t$$

Integral brzine po intervalu  $\Delta t$  ( $\Delta y$ )

$$\dot{y}_i \Delta t + \Delta \dot{y} \frac{\Delta t}{2} = \dot{y}_i \Delta t + \frac{\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}}{2} \Delta t \frac{\Delta t}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \dot{y}_i \Delta t + \frac{\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}}{4} \Delta t^2$$

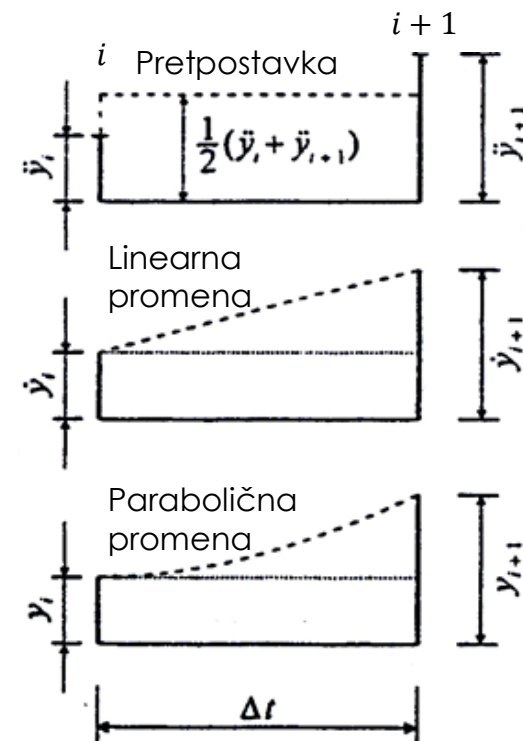
⇓

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (y_{i+1} - y_i) - \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_i - \ddot{y}_i$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (y_{i+1} - y_i) - \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_i - \ddot{y}_i$$

↓

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \frac{\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1}}{2} \Delta t \Rightarrow \dot{y}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t} (y_{i+1} - y_i) - \dot{y}_i$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija

### ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}(y_{i+1} - y_i) - \frac{4}{\Delta t}\dot{y}_i - \ddot{y}_i \Rightarrow m\ddot{y}_{i+1} + c\dot{y}_{i+1} + ky_{i+1} = F_{i+1}$$

$$\dot{y}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}(y_{i+1} - y_i) - \dot{y}_i$$

⇓

$$\left[ \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right] y_{i+1} = F_{i+1} + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} y_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_i + \ddot{y}_i \right] m + \left[ \frac{2}{\Delta t} y_i + \dot{y}_i \right] c$$

$$\bar{k} y_{i+1} = \bar{f} \Rightarrow y_{i+1} = \frac{\bar{f}}{\bar{k}}$$

$$\bar{k} = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k$$

$$\bar{f} = F_{i+1} + \left[ \frac{4}{\Delta t^2} y_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_i + \ddot{y}_i \right] m + \left[ \frac{2}{\Delta t} y_i + \dot{y}_i \right] c$$

Zamenjujuća krutost

Zamenjujuće opterećenje

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija

### ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem

#### ■ Postupak proračuna

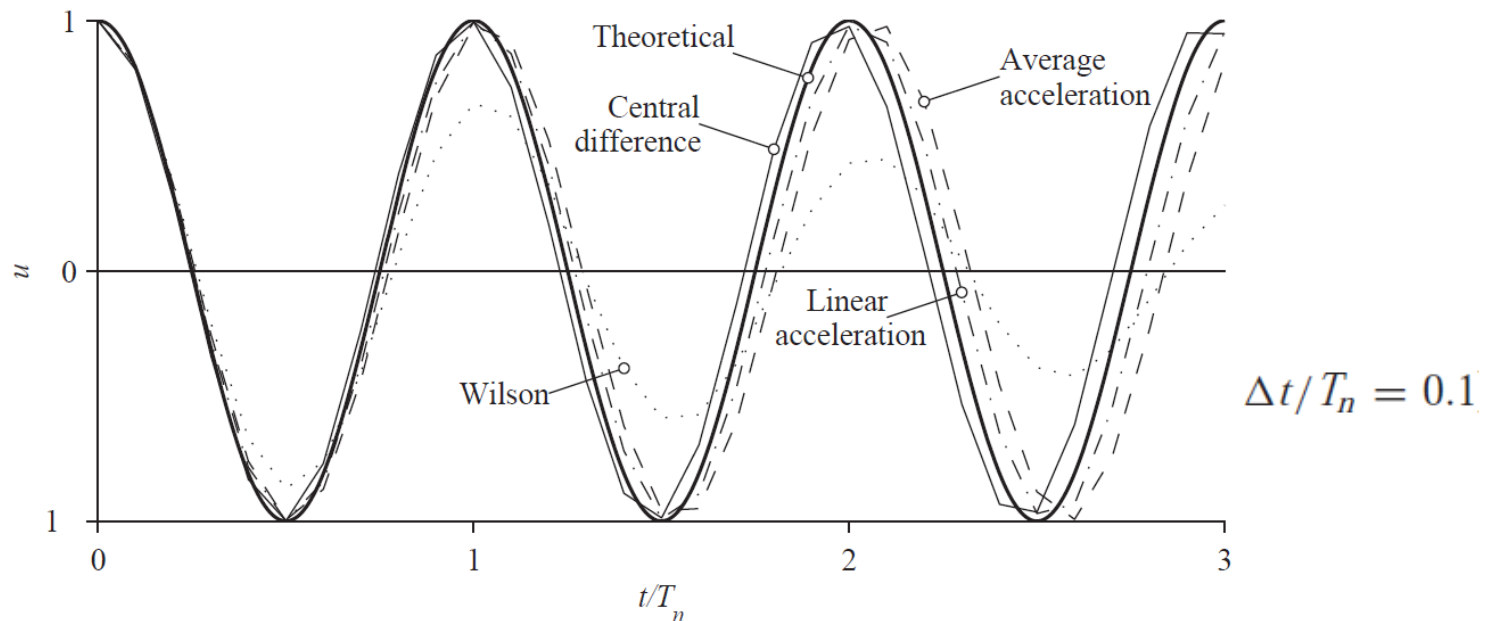
- 1) Zadato je početno pomeranje  $y(0) = y_0$  i početna brzina  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0$
- 2) Na osnovu početnih uslova određuje se početno ubrzanje iz izraza
$$\ddot{y}_0 = (F_0 - c\dot{y}_0 - ky_0)/m$$
- 3) Ako je dužina intervala  $\Delta t$  konstantna zamenjujuća krutost  $\bar{k}$  je konstantna i određuje se jednom na početku proračuna
- 4) Proračun zamenjujućeg opterećenja  $\bar{f}$
- 5) Proračun pomeranja na kraju intervala  $y_{i+1}$
- 6) Proračun brzine na kraju intervala  $\dot{y}_{i+1}$
- 7) Proračun ubrzanja na kraju intervala  $\ddot{y}_{i+1}$  (iz numeričkih razloga bolje je primeniti izraz  $\ddot{y}_{i+1} = (F_{i+1} - c\dot{y}_{i+1} - ky_{i+1})/m$ )
- Koraci proračuna 1 do 3(2) se obave jednom na početku, a koraci 4(3) do 7 ponavljaju se za svaki interval numeričke integracije
- Rešenja se određuju u trenucima vremena  $0\Delta t, 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$ , itd.

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija

### ■ Komentari za tačnost i stabilnost metoda

- U opštem slučaju uticaj grešaka kod stabilnih metoda može da bude sličan uticaju prigušenja, tj. može da produžava period i može da smanjuje amplitudu



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Numerička integracija

### ■ Komentari za tačnost i stabilnost metoda

- Newmark-ov postupak sa konstantnim (prosečnim) ubrzanjem je numerički bezuslovno stabilna metoda
- Iskustvo pokazuje da je za odgovarajuću tačnost potrebno usvojiti

$$\Delta t \leq T/10$$

- gde je T svojstveni period vibracija
- Kod izbora trajanja intervala  $\Delta t$  treba uzeti u obzir i vremenski tok dinamičkog opterećenja jer u proračun ulaze samo veličine opterećenja na granicama između intervala. Interval se bira na takav način da se promene (lomovi, vrhovi i sl.) opterećenja podudaraju sa granicama intervala
- Kod zemljotresnog opterećenja, gde su vrednosti akceleroograma date obično u intervalima između 0,005 s do 0,02 s, obično se taj interval uzima za interval numeričke integracije u praktičnim proračunima tako da su zadovoljeni prethodni uslovi

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

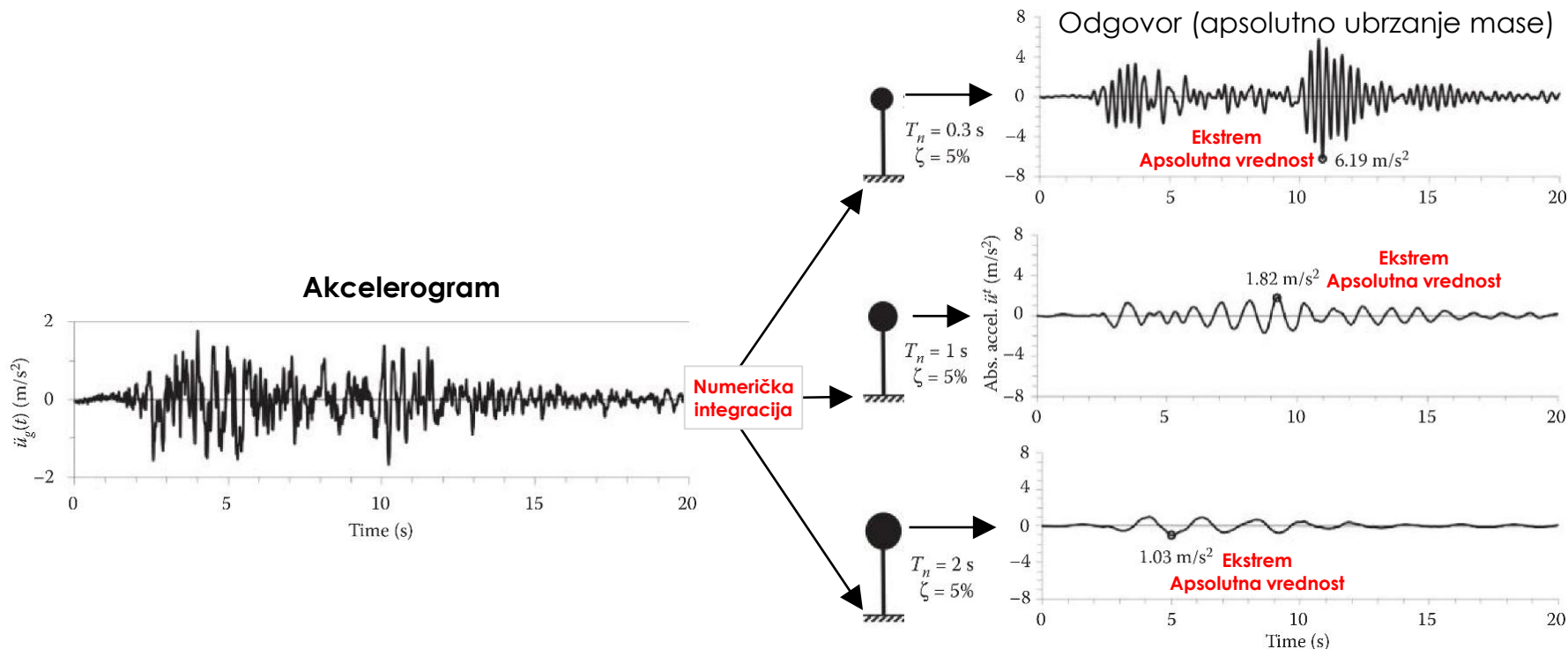
- Kod dimenzionisanja konstrukcije obično nas zanimaju maksimalne veličine odgovora sistema dok je vremenski tok odgovora od manjeg interesa
- S ozirom na prethodno rečeno korisno je za praksu imati takav dijagram sa koga može odmah da se očita veličina apsolutno maksimalnog odgovora za različite konstrukcije
- Takav dijagram se naziva Spektar odgovora (pod odgovorom se podrazumeva npr. relativno pomeranje, relativna brzina, apsolutno ubrzanje, itd.)
- Spektar prikazuje maksimalne veličine odgovora za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja za određeno dejstvo (npr. zemljotres)
- Na apscisi spektra obično se nanosi svojstveni period oscilovanja ili svojstvena kružna frekvencija (neprigušene vibracije), a na ordinati maksimalna vrednost odgovora pa se na taj način formira spektralna kriva za jedan nivo prigušenja
- Za različite vrednosti prigušenja daju se različite spektralne krive
- U spektru odgovora nema nikakvih informacija o vremenskom trenutku u kome je ostvaren maksimaln odgovor, a to pravi određene probleme kod sistema sa više stepeni slobode (biće komentarisano kasnije)
- Spektar odgovora važi samo za ono opterećenje i prigušenje za koje je izračunat
- Koristi se, između ostalog, u dinamičkoj analizi konstrukcija izloženih zemljotresu

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

### ■ Konstruisanje spektra za jedan akcelorogram i jedan nivo prigušenja

- Za zemljotresno dejstvo (proizvoljno promenljivo) spektar odgovora konstruiše se tako što se određuju pojedine vrednosti (tačke) na spektru primenom numeričke integracije



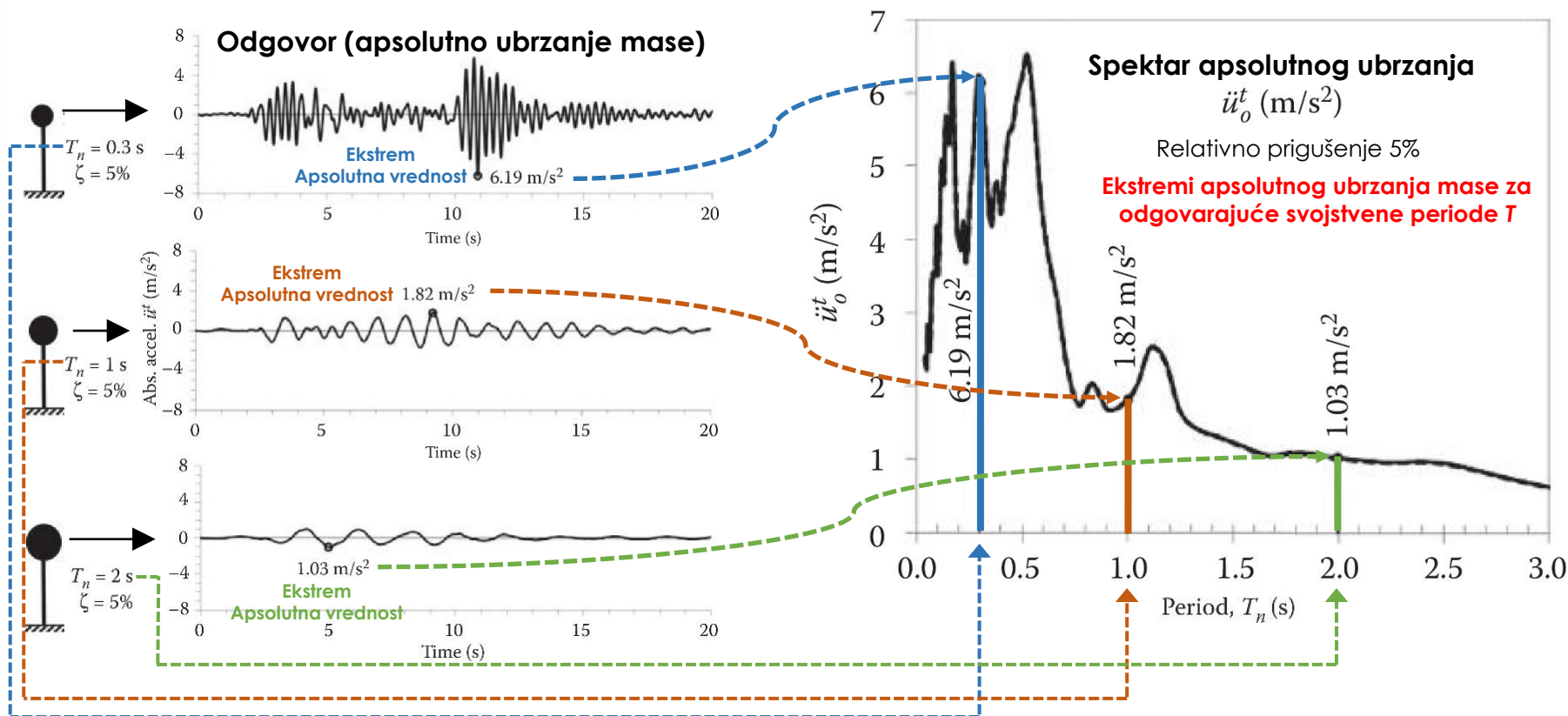
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

Komentar:

Opisanim postupkom za određivanje spektra apsolutnog ubrzanja određuju se i spektri za bilo koji drugi odgovor

## ■ Spektar odgovora

- Konstruisanje spektra za jedan akcelorogram i jedan nivo prigušenja

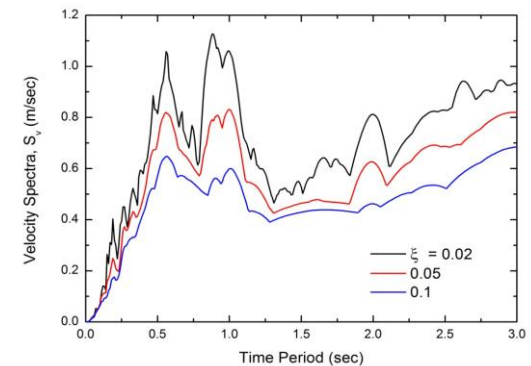
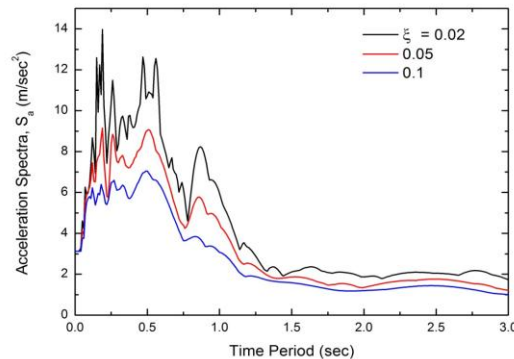
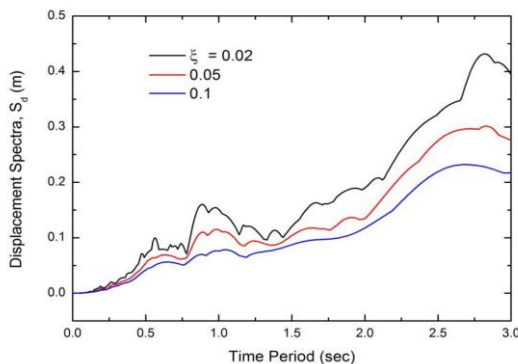




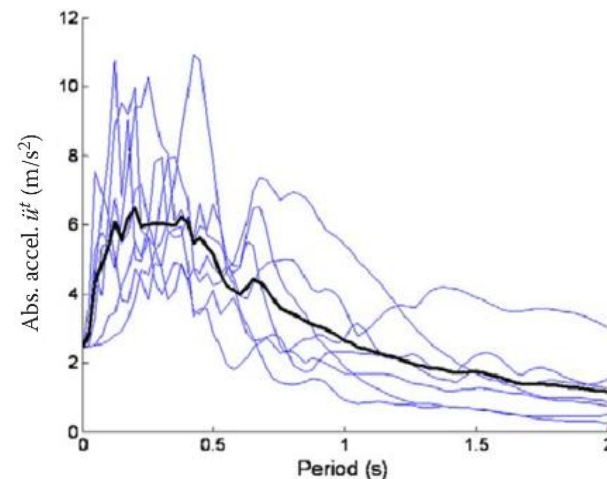
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

- Spektri za jedan akcelerogram i više različitih nivoa prigušenja



- Spektri apsolutnog ubrzanja za više akcelerograma (plave linije), jedan nivo prigušenja i njihov prosečan spektar (crna linija)



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

- Relativno pomeranje SDOF sistema usled zemljotresnog opterećenja je dato Duhamel-ovim integralom

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau = -\frac{1}{\omega_d} D(t)$$

- gde je

$$D(t) = \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

- Relativna brzina (izvod po vremenu proizvoda funkcija pod integralom) glasi

$$\dot{y}(t) = -\zeta\omega \overbrace{\left( -\frac{1}{\omega_d} \right) \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau}^{y(t)} - \frac{1}{\omega_d} \omega_d \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cos[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

$$\dot{y}(t) = -\zeta\omega y(t) - \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cos[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

- **Apsolutno ubrzanje** se određuje na sledeći način

$$m\ddot{y}^t + c\dot{y} + ky = 0 \quad / \cdot (1/m) \quad \ddot{y}^t + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \ddot{y}^t = -\omega^2 y - 2\zeta\omega\dot{y}$$

- **Spektri odgovora predstavljaju maksimalne veličine odgovora**

- **Spektar relativnih pomeranja:**  $S_d(T_n, \zeta) = |y(t, T_n, \zeta)|_{max}$  (ili  $u_o(T_n, \zeta) = |u(t, T_n, \zeta)|_{max}$ )
- **Spektar relativnih brzina:**  $S_v(T_n, \zeta) = |\dot{y}(t, T_n, \zeta)|_{max}$  (ili  $\dot{u}_o(T_n, \zeta) = |\dot{u}(t, T_n, \zeta)|_{max}$ )
- **Spektar apsolutnih ubrzanja:**  $S_a(T_n, \zeta) = |\ddot{y}^t(t, T_n, \zeta)|_{max}$  (ili  $\ddot{u}_o^t(T_n, \zeta) = |\ddot{u}^t(t, T_n, \zeta)|_{max}$ )
- U zemljotresnom inženjerstvu obično se umesto spektra apsolutnih ubrzanja koristi **spektar pseudo-ubrzanja**

$$(\ddot{y}^t = -\omega^2 y - 2\zeta\omega\dot{y}) \quad S_{pa} = \omega^2 S_d \quad S_{pa} \cong S_a \quad \text{Komentar:}$$

Kada nema prigušenja  $S_{pa} = S_a$

- U zemljotresnom inženjerstvu obično se umesto spektra relativnih brzina koristi **spektar pseudo-brzina** (videti naredni slajd)

$$S_{pv} = \omega S_d \quad S_{pv} \cong S_v \quad \text{Komentar:}$$

Kada nema prigušenja  $S_{pv}$  nije jednako sa  $S_v$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

Komentar:

Zbog male razlike u veličini perioda (kružnih frekvencija) prigušenih i neprigušenih vibracija ( $0,0 < \zeta < 0,2$ ) za uobičajene građevinske konstrukcije usvaja se  $\omega_d \cong \omega$

$$\text{Za } \zeta = 0 \quad \omega y(t) = - \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad \dot{y}(t) = - \int_0^t \ddot{y}_g(\tau) \cos[\omega(t - \tau)] d\tau$$

- $\omega y(t)$  i  $\dot{y}(t)$  se razlikuju samo za član  $\sin(\dots)$  i  $\cos(\dots)$ , a amplitude su iste pa se usvaja  $S_{pv} = \omega S_d \cong S_v$

Komentar:

Slobodne vibracije bez prigušenja; Sistem je konzervativan

Potencijalna energija:  $E_p = (1/2)ky^2$ ; Kinetička energija:  $E_k = (1/2)mv^2$

Ukupna mehanička energija je konstantna tokom kretanja

$E = E_p + E_k = \text{const.}$  (Zakon o održanju totalne mehaničke energije)

Kada sistem prolazi kroz položaj ravnoteže:

$E_p = 0$  i  $E = E_{k,max} = (1/2)mv_{max}^2 = (1/2)mS_{pv}^2$

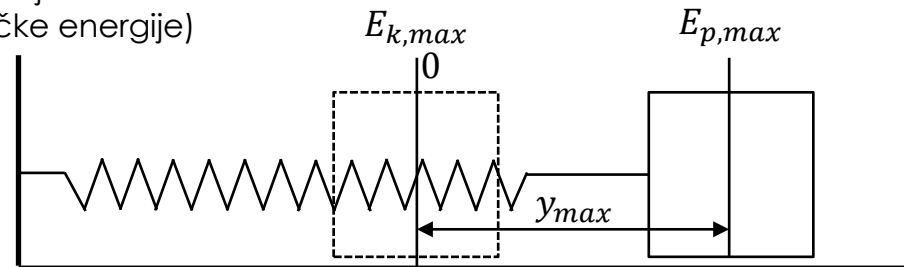
Kada sistem zauzima „krajnji“ položaj

$E = E_{p,max} = (1/2)ku_{max}^2 = (1/2)kS_d^2$  i  $E_k = 0$

Zakon o održanju totalne mehaničke energije

$E_{p,max} = E_{k,max} \Rightarrow (1/2)kS_d^2 = (1/2)mS_{pv}^2 \Rightarrow S_{pv} = \omega S_d$

Veza važi za slobodne vibracije bez prigušenja, a ne za prinudne vibracije usled  $p_{eff}$  sa prigušenjem pa je  $S_{pv} \approx S_v$  (videti izraz za relativnu brzinu)



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

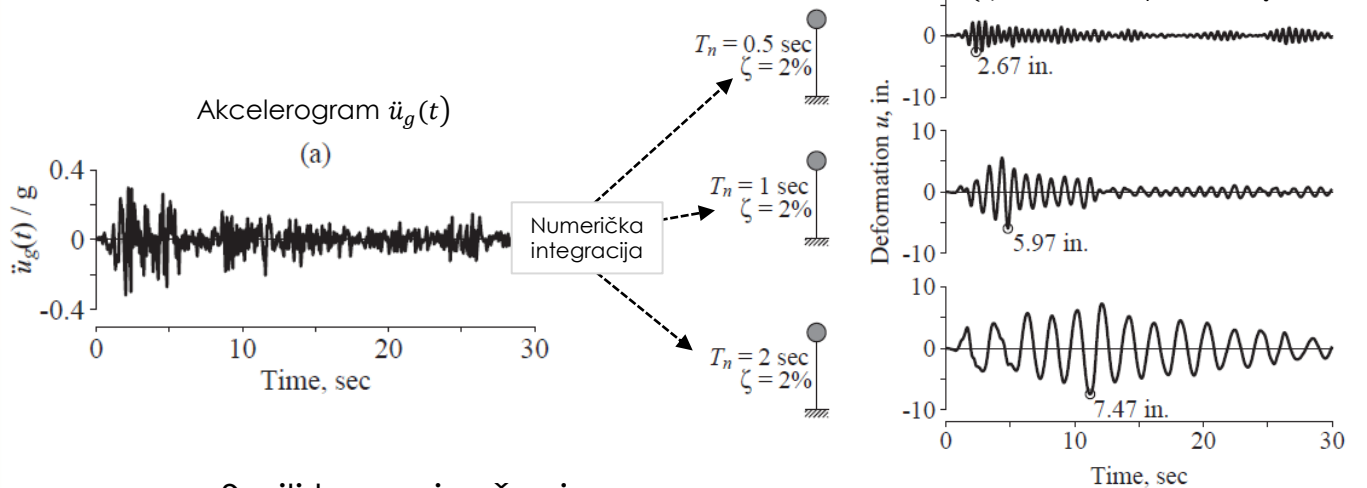
## ■ Spektar odgovora

### ■ Spektar relativnih pomeranja $S_d$ (ili $S_d = D$ , $D = u_o$ )

Spektar relativnih pomeranja

$$D = u_o = |u(t, T_n, \zeta)|_{\max}$$

(c)



### ■ Sa ili bez prigušenja

- Za ekstremno kratke svojstvene periode  $D$  teži nuli (ekstremno krut sistem;  $T \rightarrow 0$ ; masa se pomera isto kao i tlo zbog krutog sistema; ukupno (totalno ili apsolutno) pomeranje mase iznosi  $u^t = u_g + u \rightarrow u_g$  jer  $u \rightarrow 0$ ;  $u \rightarrow 0 \Rightarrow u_o \rightarrow 0 \Rightarrow D \rightarrow 0$ )
- Za ekstremno duge svojstvene periode  $D$  teži  $u_{go}$  (ekstremno fleksibilan sistem;  $T \rightarrow \infty$ ; tlo se pomera, a masa se ne pomera, tj. ukupno pomeranje mase teži nuli  $u^t = u_g + u \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -u_g \Rightarrow u_o \rightarrow u_{go} \Rightarrow D \rightarrow u_{go}$ )

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

- U zemljotresnom inženjerstvu obično se umesto spektra relativnih brzina i spektra apsolutnih ubrzanja koriste spektri pseudo-brzine i pseudo-ubrzanja. U imenima se koristi izraz „pseudo“ da se naglasi da ovi spektri nisu isto što i spektri relativnih brzina i apsolutnih ubrzanja

## ■ Spektar pseudo-brzine $S_{pv}$

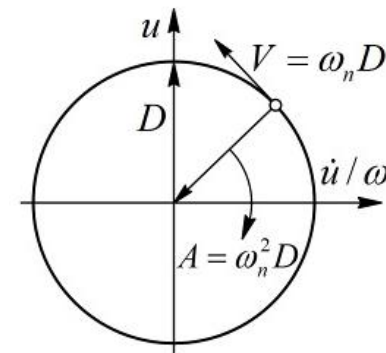
$$S_{pv} = \omega S_d = \frac{2\pi}{T} S_d \quad (\text{ili } S_{pv} = V, V = \omega D = \frac{2\pi}{T} D)$$

- Za periode i prigušenja kod uobičajenih građevinskih konstrukcija važi

$$S_{pv} \approx S_v \quad (\text{ili } V \approx \dot{u}_o)$$

- Izraz  $V = \omega D$  važi za slobodne vibracije bez prigušenja

- $u_{\text{ext}} = u_o = D, \dot{u}_{\text{ext}} = \dot{u}_o = \omega D = V$
- Pseudo-brzina (tangencijalna brzina)



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

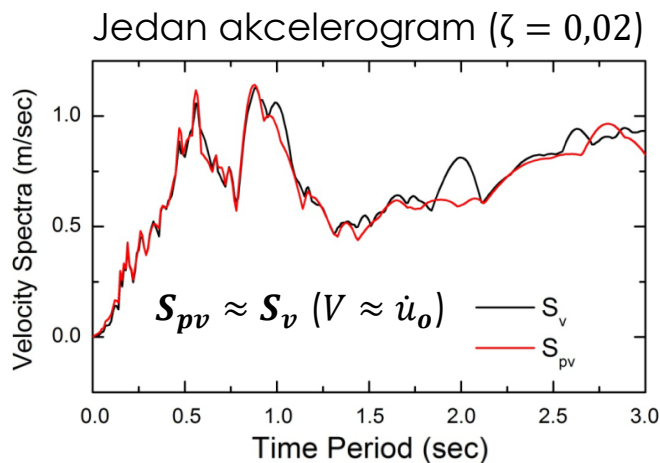
## ■ Spektar odgovora

### ■ Spektar pseudo-brzine $S_{pv} = \omega S_d = (2\pi/T)S_d$ (ili $V = \omega D = (2\pi/T)D$ )

- Razlike između spektara relativne brzine i pseudo-brzine zavise od perioda vibracija  $T$  i prigušenja
  - Za duge periode  $T$  pseudo-brzina je mnogo manja od ekstrema relativne brzine jer: 1) ekstrem relativne brzine teži ekstremu brzine tla i 2) pseudo-brzina teži nuli
    - 1) Ekstremno fleksibilan sistem;  $T \rightarrow \infty$ ; masa se ne pomera; tlo se pomera
      - Ukupno pomeranje mase teži nuli, a sastoji se od pomeranja tla i relativnog pomeranja mase, tj.  $u^t = u_g + u \rightarrow 0$ , pa sledi  $u \rightarrow -u_g \Rightarrow u_o \rightarrow u_{go}$ , odnosno  $D \rightarrow u_{go}$ )
      - Ukupna brzina mase teži nuli, a sastoji se od brzine tla i relativne brzine mase ( $\dot{u}^t = \dot{u}_g + \dot{u} \rightarrow 0$ ), pa sledi da ekstrem relativne brzine mase teži ekstremu brzine tla ( $\dot{u} \rightarrow -\dot{u}_g \Rightarrow \dot{u}_o \rightarrow \dot{u}_{go}$ )
    - 2) Ekstremno fleksibilan sistem;  $T \rightarrow \infty$ ;  $V = \frac{2\pi}{T \rightarrow \infty} D \rightarrow \frac{2\pi}{T \rightarrow \infty} u_{go} \rightarrow 0$
  - Za kratke svojstvene periode pseudo-brzina ima veće vrednosti, a za srednje i duge periode ima manje vrednosti od ekstrema relativne brzine
  - Ako  $\zeta$  raste razlika između pseudo-brzine i relativne brzine raste. Za  $\zeta = 0$  između pseudo-brzine i relativne brzine nije postignuta potpuna jednakost jer je u izrazu  $\omega u(t)$  sinus, a u  $\dot{u}(t)$  kosinus. Najmanja razlika je za sistem bez prigušenja

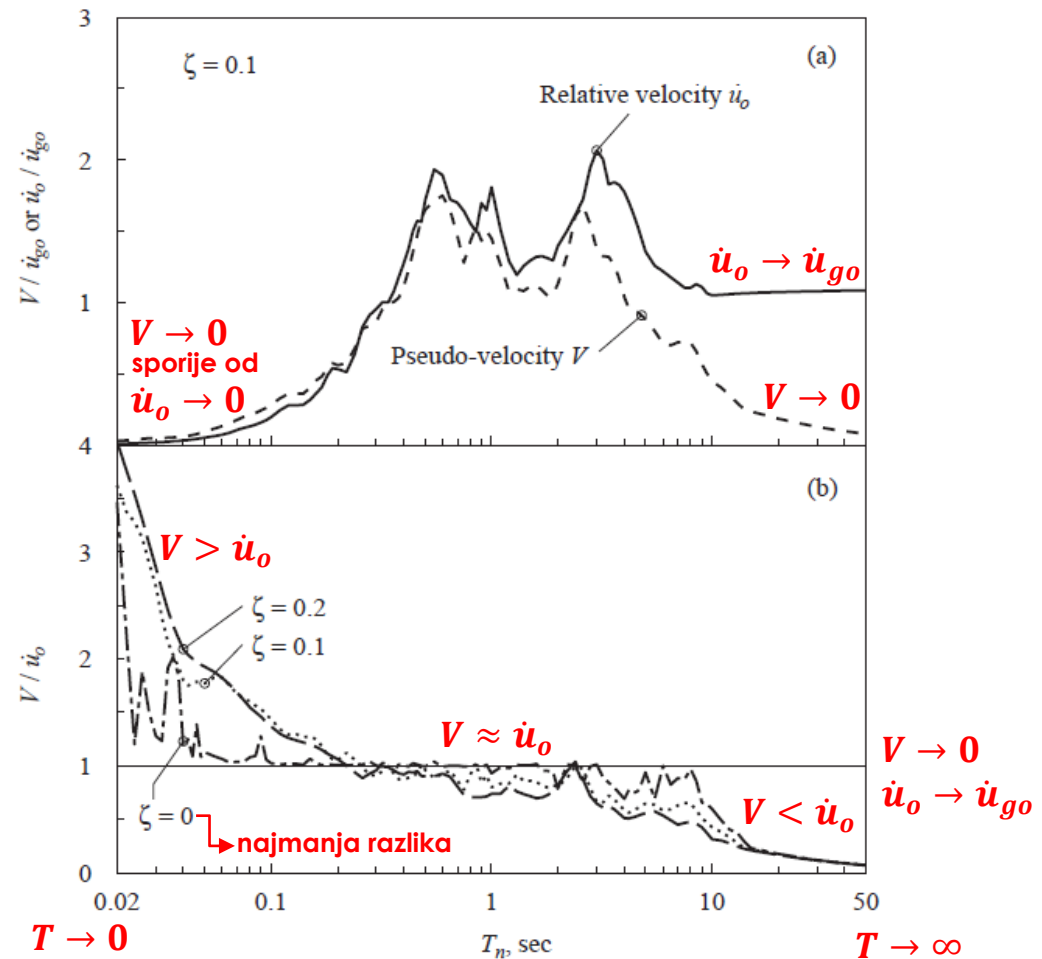
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Spektar odgovora**
  - **Spektar pseudo-brzine**
    - $S_{pv}$  i  $S_v$  (ili  $V$  i  $\dot{u}_o$ )
    - Karakteristike



## Komentari

- Postoje „vidljive“ razlike u oblasti srednjih i dugih perioda
- Za uobičajene vrednosti prigušenja „male“ su razlike za kratke i srednje periode





# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

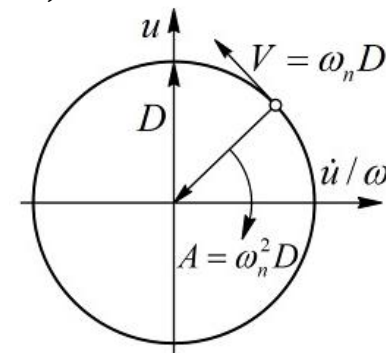
- **Spektar pseudo-ubrzanja  $S_{pa}$**   
(apsolutno ubrzanje mase  $\ddot{u}^t = -\omega^2 u - 2\zeta\omega\dot{u}$ )

$$S_{pa} = \omega^2 S_d = (2\pi/T)^2 S_d = \omega S_{pv} \quad (\text{ili } S_{pa} = A, A = \omega^2 D = (2\pi/T)^2 D = \omega V)$$

- Za periode i prigušenja kod uobičajenih građevinskih konstrukcija važi

$$S_{pa} \approx S_a \quad (\text{ili } A \approx \ddot{u}_o^t)$$

- Ako nema prigušenja ( $\zeta = 0$ ) pseudo-ubrzanje i apsolutno ubrzanje mase su jednaki, tj.  $\ddot{u}^t = -\omega^2 u - 2\zeta\omega\dot{u} = -\omega^2 u \Rightarrow \ddot{u}_o^t = \omega^2 u_o = \omega^2 D = A$
- Ako ima prigušenja razlika između pseudo-ubrzanja i apsolutnih ubrzanja mase raste sa porastom prigušenja zbog sve većeg uticaja člana  $-2\zeta\omega\dot{u}$ 
  - Za kratke periode  $A \rightarrow \ddot{u}_o^t$ , a za duge periode  $A < \ddot{u}_o^t$
- Ekstremno krut sistem;  $T \rightarrow 0$ ;  $\ddot{u}_o^t \rightarrow \ddot{u}_{go}$ ;  $A \rightarrow \ddot{u}_{go}$
- Ekstremno fleksibilan sistem;  $T \rightarrow \infty$ ;  $\ddot{u}_o^t \rightarrow 0$ ;  
 $A = (2\pi/(T \rightarrow \infty))^2 D \rightarrow (2\pi/(T \rightarrow \infty))^2 u_{go} \rightarrow 0$ ;  
 $A$  opada brže od  $\ddot{u}_o^t$
- Pseudo-ubrzanje (radijalno ubrzanje)



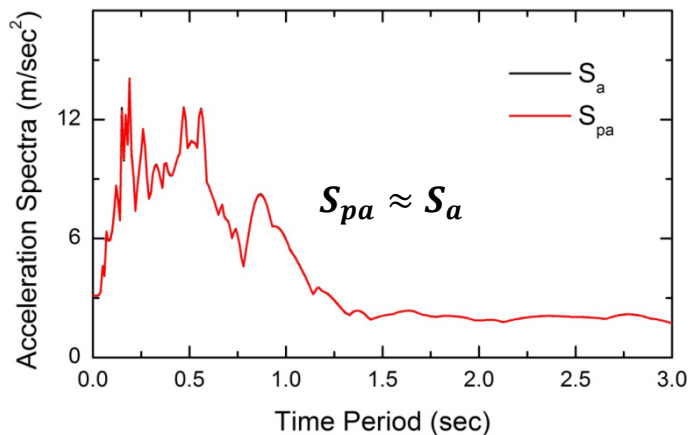
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

### ■ Spektar pseudo-ubrzanja

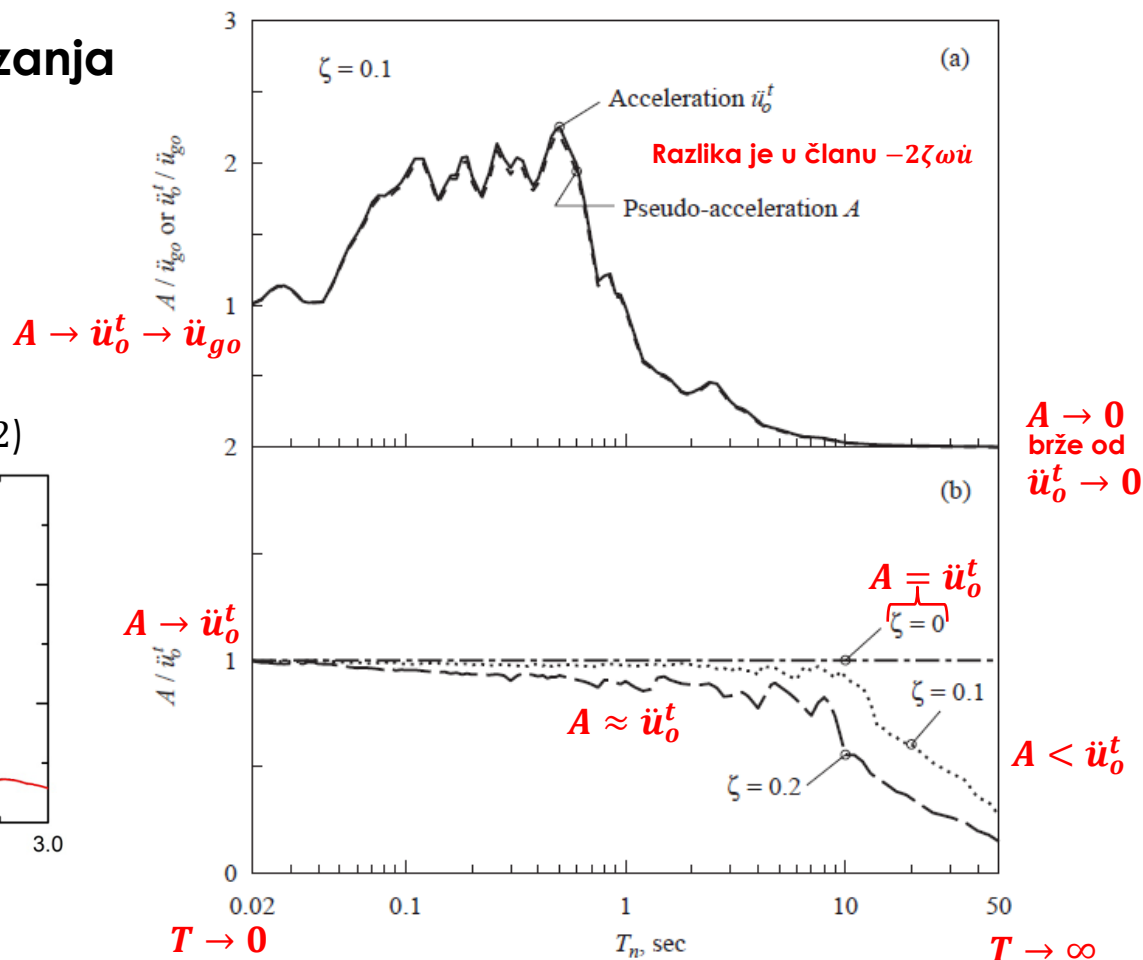
- $S_{pa}$  i  $S_a$  (ili  $A$  i  $\ddot{u}_o^t$ )
- Karakteristike

Jedan akcelorogram ( $\zeta = 0,02$ )



Komentar

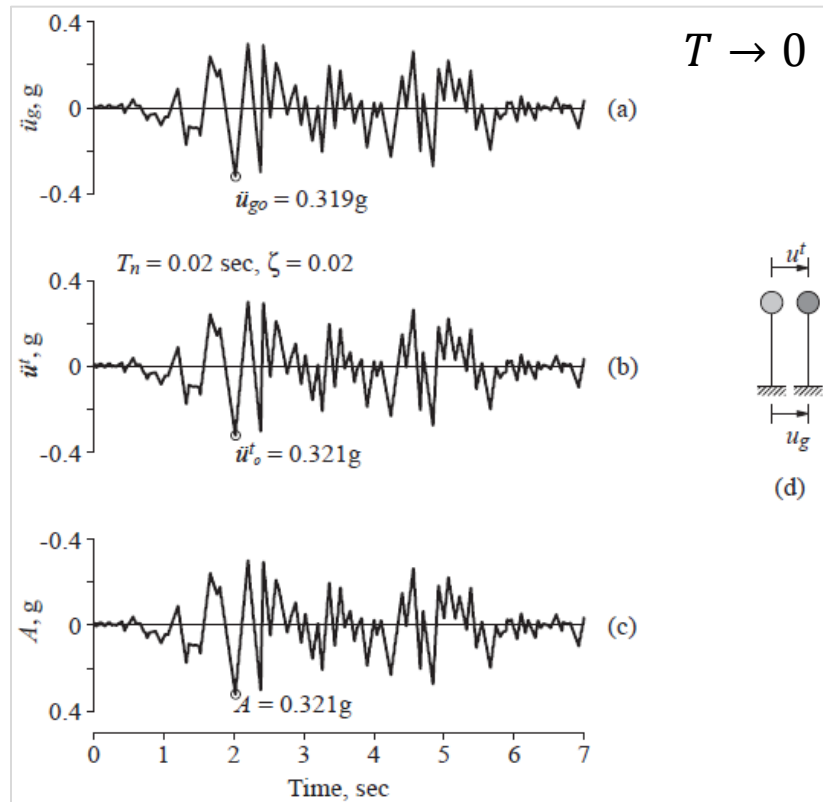
- Praktično su međusobno jednaki



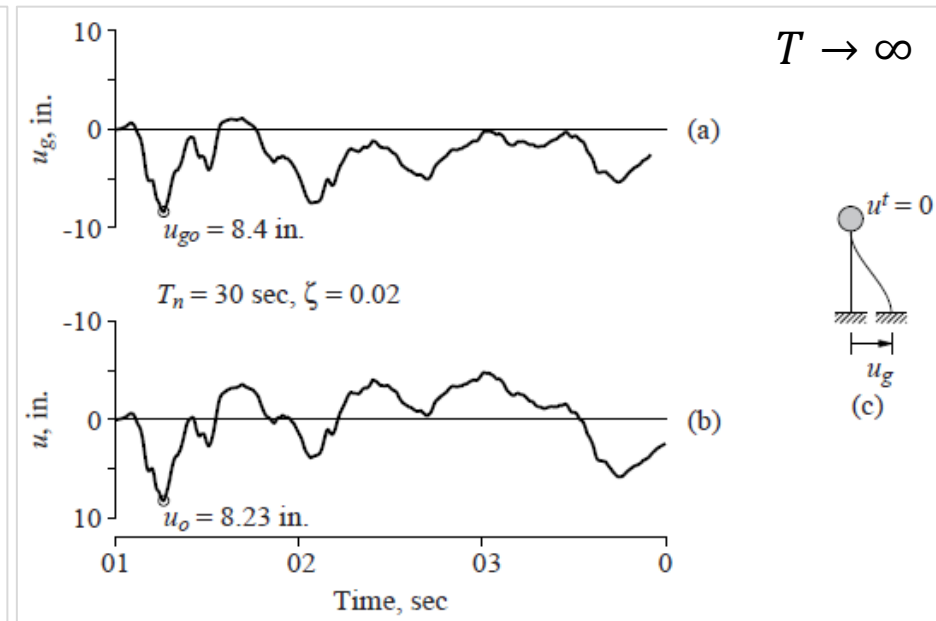
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

„Ekstremno krut sistem“



„Ekstremno fleksibilan sistem“



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

Relative displacement, $ x(t) _{\max}$	$= S_d$	$\simeq \frac{S_v}{\omega_0}$	$\simeq \frac{S_a}{\omega_0^2}^*$	$= \frac{S_{pv}}{\omega_0}$	$= \frac{S_{pa}}{\omega_0^2}$
Relative velocity, $ \dot{x}(t) _{\max}$	$\simeq \omega_0 S_d$	$= S_v$	$\simeq \frac{S_a}{\omega_0}$	$\simeq S_{pv}$	$\simeq \frac{S_{pa}}{\omega_0}$
Absolute acceleration, $ \ddot{x}_a(t) _{\max}$	$\simeq \omega_0^2 S_d^*$	$\simeq \omega_0 S_v$	$= S_a$	$\simeq \omega_0 S_{pv}$	$\simeq S_{pa}^*$

(\* If  $\xi = 0$  these relations are exact and the sign  $\simeq$  is valid up to  $0 < \xi < 0.2$  )

- Spektri pseudobrzine i pseudoubrzanja su proporcionalni maksimalnoj potencijalnoj energiji i maksimalnoj unutrašnjoj sili (maksimalnoj seizmičkoj sili) u elastičnoj konstrukciji

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2} k |y|_{\max}^2 = \frac{1}{2} k S_d^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{S_{pv}}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} m S_{pv}^2 \quad S_{\max} = k |y|_{\max} = k S_d = m \omega^2 S_d = m S_{pa}$$

Komentari:

- Iz spektra relativnih pomeranja određuje se maksimum relativnih pomeranja
- Iz spektra pseudo-brzine određuje se maksimalna potencijalna energija
- Iz spektra pseudo-ubrzanja se određuje maksimalna seizmička sila

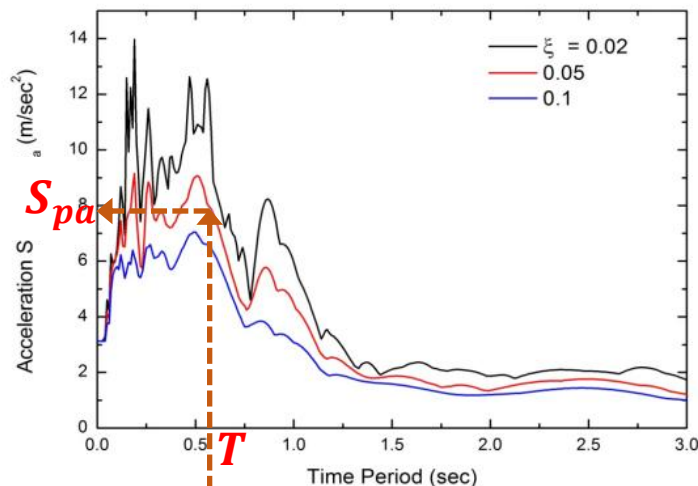
# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Spektar odgovora

### ■ Primena

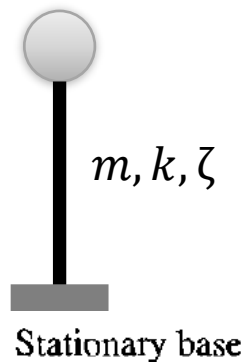
1

Odredi se spektar odgovora (npr. pseudo-ubrzanja) za jedan akcelerogram i više različitih nivoa prigušenja numeričkim postupkom



2

Analizira se sistem sa jednim stepenom slobode. Određivanje perioda slobodnih neprigušenih vibracija  $T$



3

Odredi se pseudo-ubrzanje  $S_{pa}(T, \zeta)$

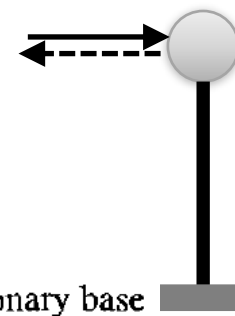
4

Odredi se seizmička sila  $S_{ext} = \pm m S_{pa}$

5

Statička analiza usled seizmičke sile i određivanje ekstremnog odgovora

$$S_{ext} = \pm m S_{pa}$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

$$\left. \begin{array}{l} V = \omega_n D \\ A = \omega_n^2 D \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{ili} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D$$

$$\log V = \log(T_n) + \log(A/(2\pi)) \quad \text{i} \quad \log V = -\log(T_n) + \log(2\pi D)$$

## ■ Spektar odgovora

### ■ Tripartitni (logaritamski) spektar (D-V-A spektar)

- Moguće je tri spektra prikazati na jednom grafiku (pseudoubrzanje  $A$ , pseudobrzina  $V$  i relativno pomeranje  $D$ )
- Logaritamski prikaz pseudobrzine daje zajednički (tripartitni) spektar

$$A = 2\pi V / T_n = \hat{A}$$

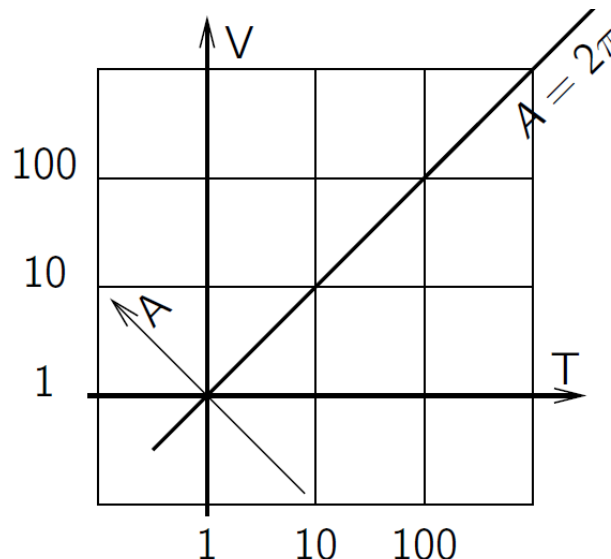
$$\log \frac{\hat{A}}{2\pi} = \log V - \log T_n$$

$$\log V = \log T_n + \log \frac{\hat{A}}{2\pi}$$

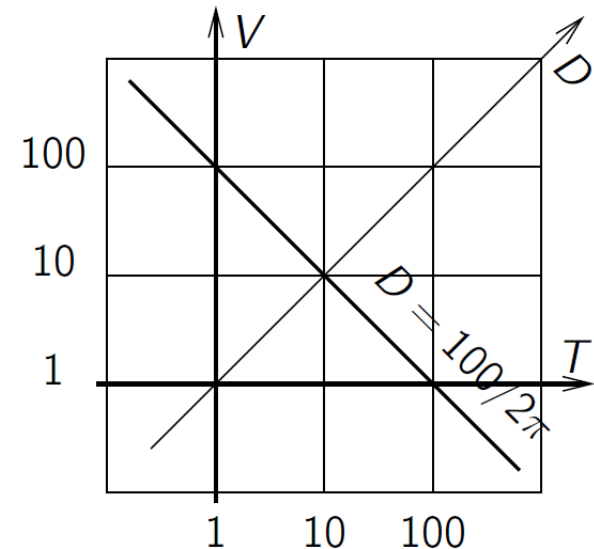
$$D = T_n V / 2\pi = \hat{D}$$

$$\log 2\pi \hat{D} = \log V + \log T_n$$

$$\log V = \log 2\pi \hat{D} - \log T_n$$



In the log-log plane straight lines at  $45^\circ$  are characterized by a constant value of  $A$ .

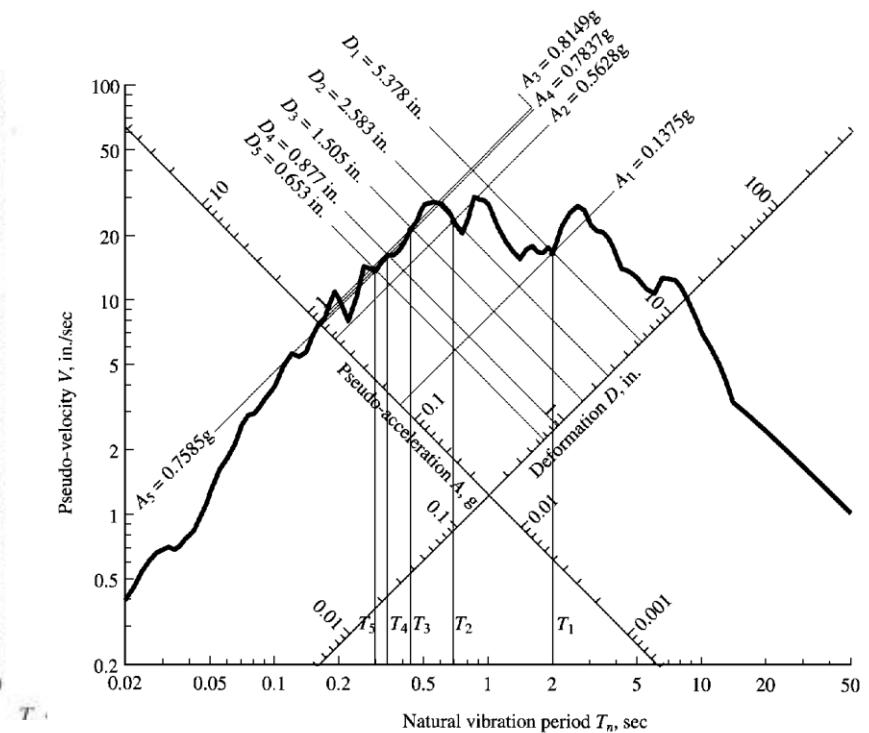
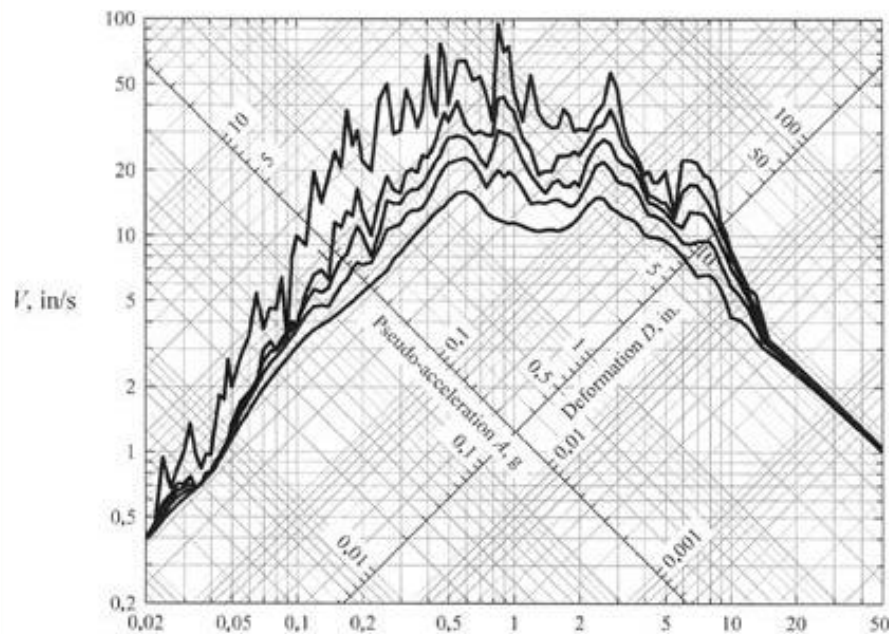


In the log-log plane straight lines at  $-45^\circ$  are characterized by a constant value of  $D$ .

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- Spektar odgovora
  - D-V-A spektar

$$\zeta = 0.00, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20$$



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

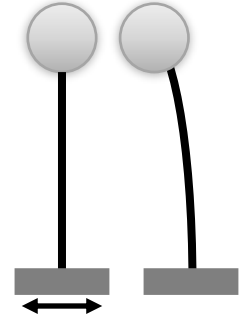
## ■ Spektar odgovora

### ■ D-V-A spektar

#### „OBIČNE“ (srednje krute) KONSTRUKCIJE

- Srednji svojstveni periodi se poklapaju sa predominantnim periodama vibracija tla
- Vrednosti se nalaze približno između  $\sim 0,5 - 3,0$  s
- Najvažniji parametar **brzina** (**energija zavisi od brzine**)
- Najviše energije se unosi sa svojstvenim periodama koje se poklapaju sa predominantnim periodama vibracija tla
- VELOCITY-SENSITIVE REGION**

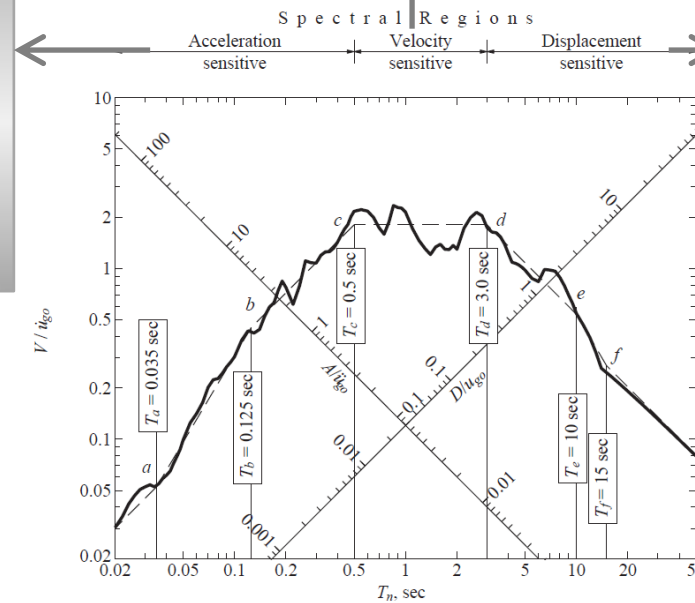
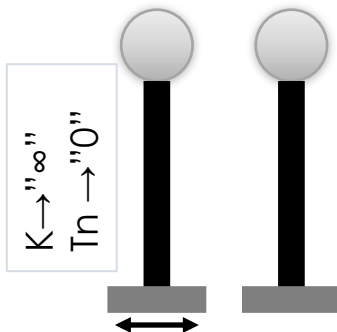
K  $\rightarrow$  „konačna“



#### „KRUTE“ KONSTRUKCIJE

- Kratki svojstveni periodi vibracija ( $< \sim 0,5$  s)
- Ubrzanje konstrukcije je približno jednako ubrzanju tla
- Najvažniji parametar **ubrzanje**
- Maksimalno ubrzanje tla je u dobroj korelaciji sa štetom
- ACCELERATION-SENSITIVE REGION**

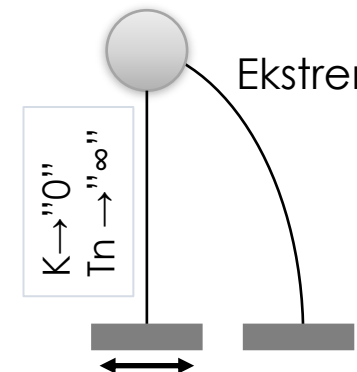
Ekstrem



#### „FLEKSIBILNE“ KONSTRUKCIJE

- Dugi svojstveni periodi ( $> \sim 3,0$  s)
- Relativno pomeranje je približno jednako pomeranju tla
- Najvažniji parametar je **pomeranje**
- DISPLACEMENT-SENSITIVE REGION**

Ekstrem



#### Komentar:

Od odnosa  $v_t/a_t$  ( $v_{max}/a_{max}$ ) zavisi početak dela spektra sa konstantnim pseudobrzinama



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Projektni spektar odgovora

- Kod projektovanja građevinskih konstrukcija nemamo tačne podatke o budućem zemljotresu...
- ... pa se ne koristi spektar odgovora za određeni zemljotres, već se koristi projektni spektar (definisan u propisima) koji se određuje probabilističkim pristupom na osnovu već dogođenih zemljotresa
- Obično se zadaje u obliku spektra **pseudo-ubrzanja** za različite kategorije tla i nivoe prigušenja
- Treba da odražava karakteristike zemljotresa koji se događaju na području za koje važi
- **Prema SRPS EN 1998-1 osnovni način za prikazivanje zemljotresnog dejstva je spektar odgovora.** Alternativan način za prikazivanje zemljotresnog dejstva je preko vremenske istorije ubrzanja tla i povezanih veličina, tj. brzine i pomeranja

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

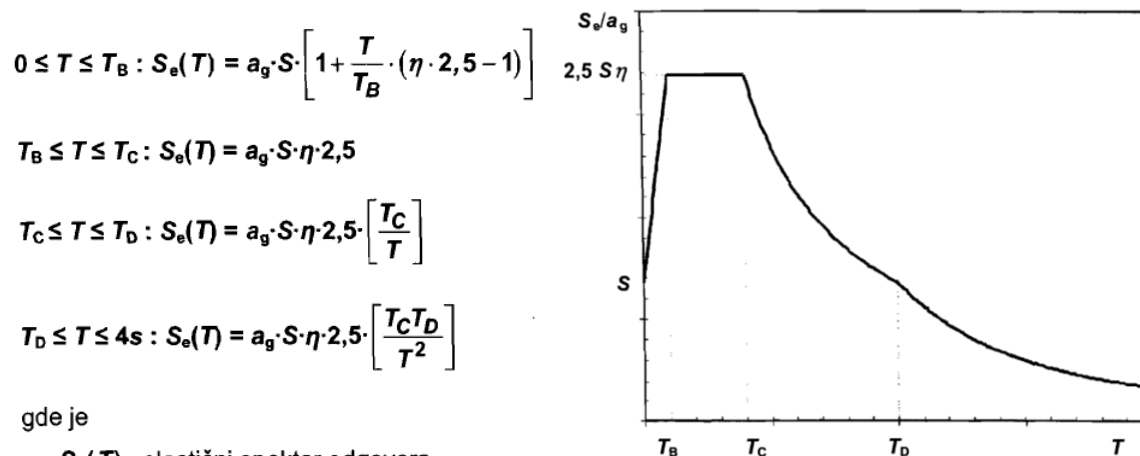
## ■ Spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA

- Spektar odgovora za horizontalan pravac (**tip 1**) – elastična statička analiza

„Horizontalni elastični spektar odgovora“

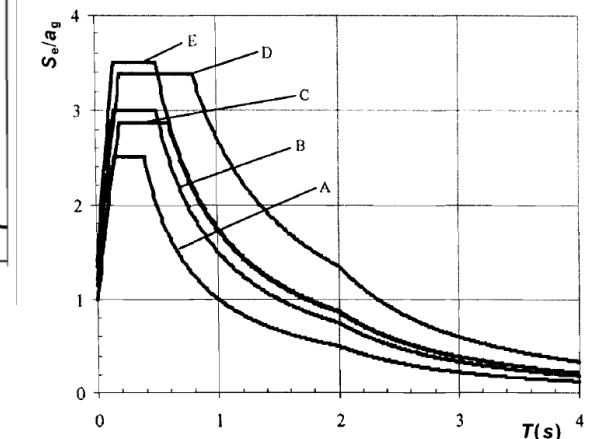
Spektar odgovora za elastičnu statičku analizu  
(Pseudo-) Ubrzanje  
(Pseudo-) Spektralno ubrzanje

$M_s \geq 5.5$



gde je

- $S_e(T)$  elastični spektar odgovora  
 $T$  period vibracija linearnog sistema sa jednim stepenom slobode  
 $a_g$  projektno ubrzanje tla za tlo tipa A ( $a_g = \gamma \cdot a_{gR}$ )  
 $T_B$  donja granica perioda u oblasti sa konstantnim spektralnim ubrzanjem  
 $T_C$  gornja granica perioda u oblasti sa konstantnim spektralnim ubrzanjem  
 $T_D$  vrednost perioda koja definiše početak oblasti spektra sa konstantnim odgovorom pomeranja u spektru  
 $S$  faktor tla  
 $\eta$  faktor korekcije prigušenja sa referentnom vrednošću  $\eta = 1$  za viskozno prigušenje od 5%, videti (3) ovog člana.



Slika 3.2: Preporučeni tip 1 elastičnog spektra odgovora za kategorije tla A do E (5% prigušenja)

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA**
  - Spektar odgovora za horizontalan pravac (**tip 3**) – elastična statička analiza

„Horizontalni elastični spektar odgovora“

$$0 \leq T \leq T_B : S_e(T) = a_g S \left[ 1 + \frac{T}{T_B} (2,75\eta - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_e(T) = 2,75 a_g S \eta$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_e(T) = 2,75 a_g S \eta \left[ \frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_e(T) = 2,75 a_g S \eta \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right]$$

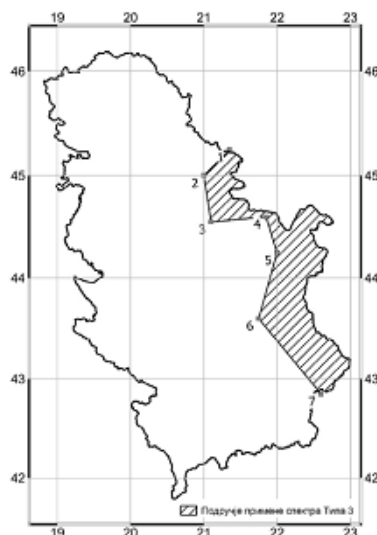
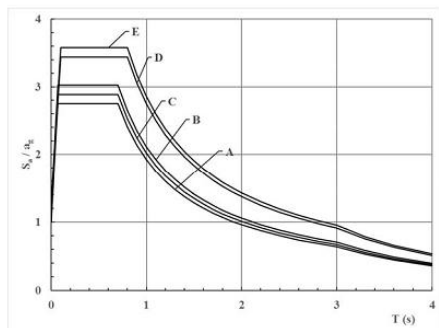


Tabela 3.1: Klasifikacija tla

Kategorija tla	Opis geološkog profila	Parametri		
		$V_{s,30}$ (m/s)	$N_{SP1}$ (udarci/30 cm)	$C_u$ (kPa)
A	Stena ili stenska geološka formacija, uključujući najviše 5 m slabijeg materijala na površini	> 800	-	-
B	Depoziti vrlo gustog peska, šljunka ili vrlo krute gline, debljine barem nekoliko desetina metara, sa povećanjem mehaničkih osobina sa dubinom	360 - 800	> 50	> 250
C	Duboki depoziti gustog ili srednje gustog peska, šljunka ili krute gline, sa debljinama od nekoliko desetina do više stotina metara	180 - 360	15 - 50	70-250
D	Depoziti slabo-do-srednje nekohezivnog tla (sa ili bez mekih kohezivnih slojeva) ili dominantno meko-do-tvrsto kohezivno tlo	< 180	< 15	< 70
E	Tlo čiji se profil sastoji iz aluvijalnog sloja sa vrednostima $v_s$ za Tip C ili D i sa debljinom koja varira između oko 5m i 20m, ispod kojeg je kruto tlo sa $v_s \geq 800$ m/s			
S1	Depoziti koji se sastoje ili sadrže sloj od barem 10 m debljine mekih gлина/mulja sa visokim indeksom plastičnosti ( $PI > 40$ ) i sa visokim sadržajem vode	< 100	-	10 - 20
S2	Depoziti likvefabilnog tla, sastavljenih od osetljivih gлина ili od bilo kog drugog profila tla koji nije uključen u Tipove A-E ili S1			

Tabela 3.2: Vrednosti parametara koji opisuju preporučen tip 1 elastičnog spektra odgovora

Kategorija tla	$S$	$T_B$ (s)	$T_C$ (s)	$T_D$ (s)
A	1,0	0,15	0,4	2,0
B	1,2	0,15	0,5	2,0
C	1,15	0,20	0,6	2,0
D	1,35	0,20	0,8	2,0
E	1,4	0,15	0,5	2,0

Tabela NA 3.1 – Vrednosti parametara koji opisuju preporučeni tip 3 elastičnog spektra odgovora

Kategorije tla	$S$	$T_B$ (s)	$T_C$ (s)	$T_D$ (s)
A	1,0	0,07	0,7	3,0
B	1,1	0,07	0,7	3,0
C	1,05	0,07	0,7	3,0
D	1,25	0,10	0,8	3,0
E	1,3	0,10	0,8	3,0

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA**
  - Spektar odgovora za vertikalni pravac – elastična statička analiza

„Vertikalni elastični spektar odgovora“

$$0 \leq T \leq T_B : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3,0 - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left[ \frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right]$$

Spektar odgovora za elastičnu  
statičku analizu  
(Pseudo-) Ubrzanje  
(Pseudo-) Spektralno ubrzanje

Табела NA 3.3 – Препоручене вредности параметара који дефинишу  
вертикалан спектар одговора

Спектар	$a_{vg}/a_g$	$T_B$ (s)	$T_C$ (s)	$T_D$ (s)
Тип 1	0,90	0,05	0,15	1,0
Тип 3	0,70	0,03	0,32	3,0

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Projektni spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA

- Projektni spektar odgovora za horizontalan pravac za elastičnu statičku analizu

„Projektni spektar za elastičnu analizu“

$$0 \leq T \leq T_B : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \left[ \frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \cdot \left( \frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

(Pseudo-) Ubrzanje  
(Pseudo-) Spektralno ubrzanje

Projektni spektar odgovora (ordinate elastičnog spektra odgovora se „dele“ sa faktorom ponašanja  $q$ )

$$T_B \leq T \leq T_C : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q}$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[ \frac{T_C}{T} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

$$T_D \leq T : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

(2) Sa ciljem da se izbegne eksplicitna nelinearna analiza, uzimajući u obzir kapacitet konstrukcije za disipaciju energije kroz prevashodno duktilno ponašanje njenih elemenata ali i preko drugih mehanizama, sprovodi se elastična analiza zasnovana na spektru odgovora koji je redukovan (umanjen) u odnosu na elastični spektar, koji se u daljem tekstu naziva "projektni spektar". Ova redukcija se ostvaruje uvođenjem faktora ponašanja  $q$ .

$S_d(T)$  projektni spektar;  
 $q$  faktor ponašanja;  
 $\beta$  faktor donje granice horizontalnog projektnog spektra.

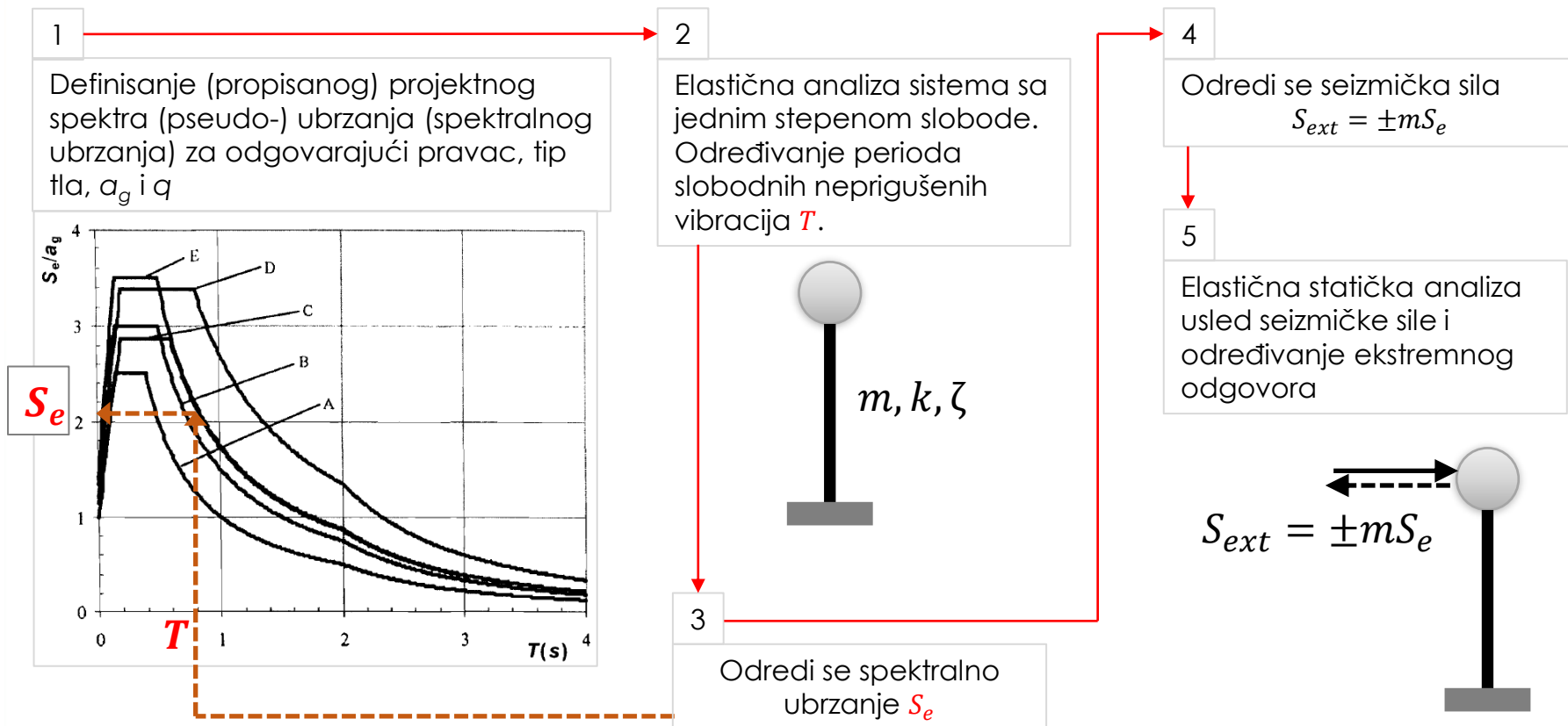
**Napomena:** Vrednosti koje se pripisuju faktoru  $\beta$  za korišćenje u zemlji može da se pronađe u njenom Nacionalnom aneksu. Preporučena vrednost za faktor  $\beta$  je 0,2.

- Projektni spektar odgovora za vertikalni pravac
  - $a_g \rightarrow a_{vg}$ ; usvaja se da je  $S=1$

# Sistemi sa jednim stepenom slobode

## ■ Projektni spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA

### ■ Primena



# Sistemi sa jednim stepenom slobode

- **Projektni spektar odgovora – SRPS EN 1998-1 i SRPS EN 1998-1/NA**
  - Seizmički hazard se opisuje preko jednog parametra  $a_{gR}$  (referentno ubrzanje tla tipa A)

<https://www.seismo.gov.rs/>

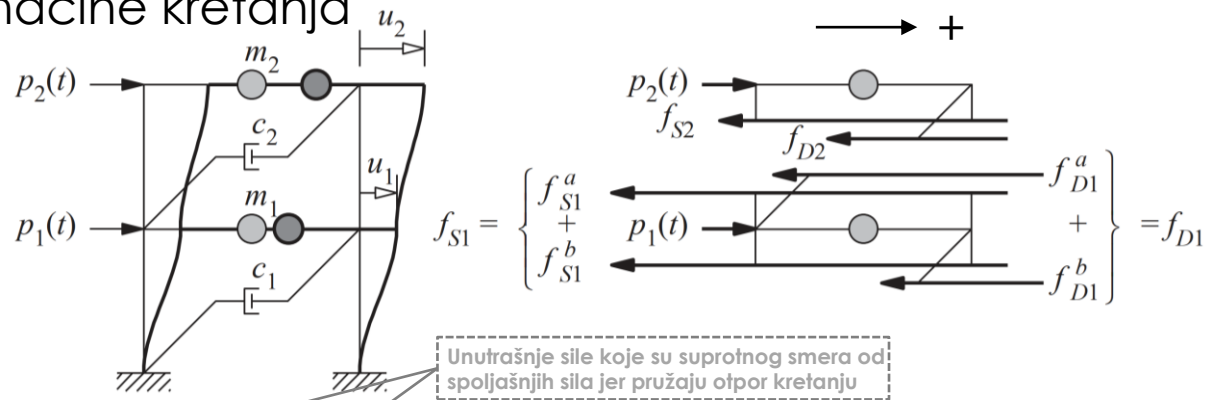


# Sistemi sa više stepeni slobode kretanja (Multi-Degrees-Of-Freedom; MDOF)

## ■ Prinudne prigušene vibracije – dvospratni okvir sa potpuno krutim gredama (Shear Building)

### ■ Diferencijalne jednačine kretanja

- Dvospratni okvir sa potpuno krutim gredama na savijanje (Shear frame).
- Zanimarena aksijalna deformacija.
- 2 stepena slobode kretanja (kretanje masa u horizontalnom pravcu).



Drugi Njutnov zakon za svaku masu:  $[p_j] - [f_{Sj}] - [f_{Dj}] = [m_j \ddot{u}_j]$  or  $m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t)$

$$\begin{array}{c}
 \text{Inercijalne sile} \\
 \left[ \begin{array}{cc} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{D1} \\ f_{D2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} f_{S1} \\ f_{S2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1(t) \\ p_2(t) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Inercijalne sile      Sile unutrašnjeg viskoznog prigušenja      Sile elastičnog otpora      Spoljašnje sile

Simbolički zapis

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_S = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$$

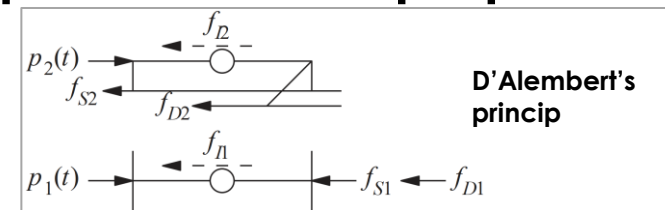
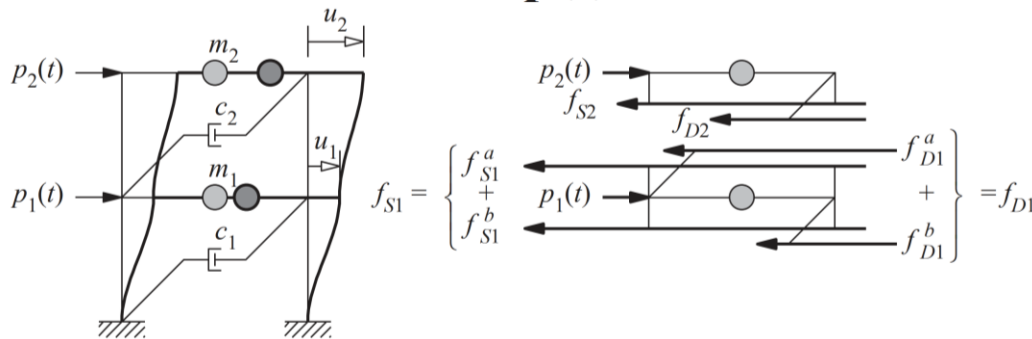


# Sistemi sa više stepeni slobode

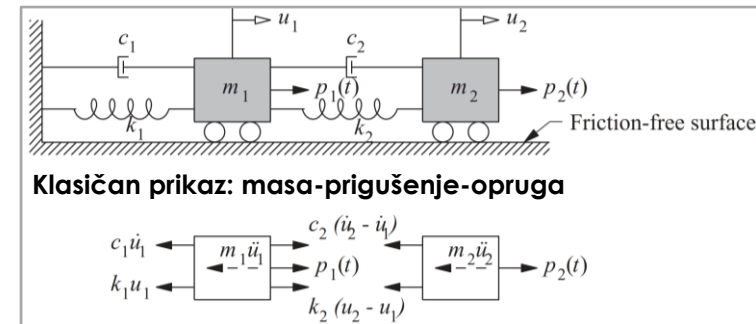
## ■ Prinudne prigušene vibracije – dvospratni okvir sa potpuno krutim gredama (Shear Building)

- Diferencijalne jednačine kretanja

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$$



D'Alembert's  
princip



Klasičan prikaz: masa-prigušenje-opruga

Sile elastičnog otpora  $f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a$

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2)$$

$$f_{S2} = k_2 (u_2 - u_1)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Inercijalne sile

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

Sile  
unutrašnjeg viskozno  
prigušenja

$$f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad f_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

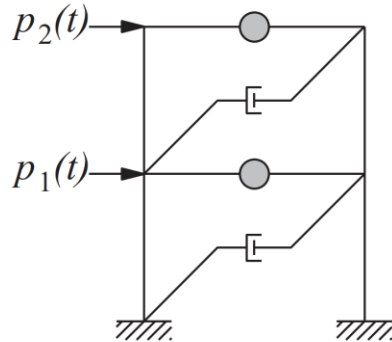
$\mathbf{m}$  – matrica mase     $\mathbf{c}$  – matrica prigušenja     $\mathbf{k}$  – matrica krutosti

# Sistemi sa više stepeni slobode

- **Prinudne prigušene vibracije – dvospratni okvir sa potpuno krutim gredama (Shear Building)**
  - Sistem kao kombinacija tri komponente

Vektor spoljašnjeg dejstva

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$



Displacements  $u_j$   
Velocities  $\dot{u}_j$   
Accelerations  $\ddot{u}_j$

Krutost (sistem bez prigušenja i mase)

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix}$$

Displacements  $u_j$

Prigušenje (sistem bez krutosti i mase)

$$\mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix}$$

Velocities  $\dot{u}_j$

Masa (sistem bez krutosti i prigušenja)

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \end{Bmatrix}$$

Accelerations  $\ddot{u}_j$

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

- **Višespratni okvir sa potpuno krutim gredama (Shear Building)**
  - Analogno kao i kod sistema sa dva stepena slobode

$$m_i \ddot{u}_i + (k_i + k_{i+1})u_i(t) - k_{i+1}u_{i+1}(t) = F_i(t)$$

$$K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_i & (k_i + k_{i+1}) & -k_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i+1} & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{n-1} & (k_{n-1} + k_n) & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

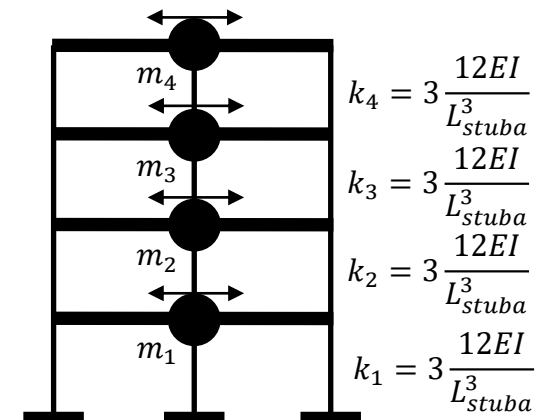
$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

Komentar:

○ matrici prigušenja biće reči kasnije

## Primer

Svi stubovi jednog sprata imaju isto  $E$ ,  $I$  i  $L$



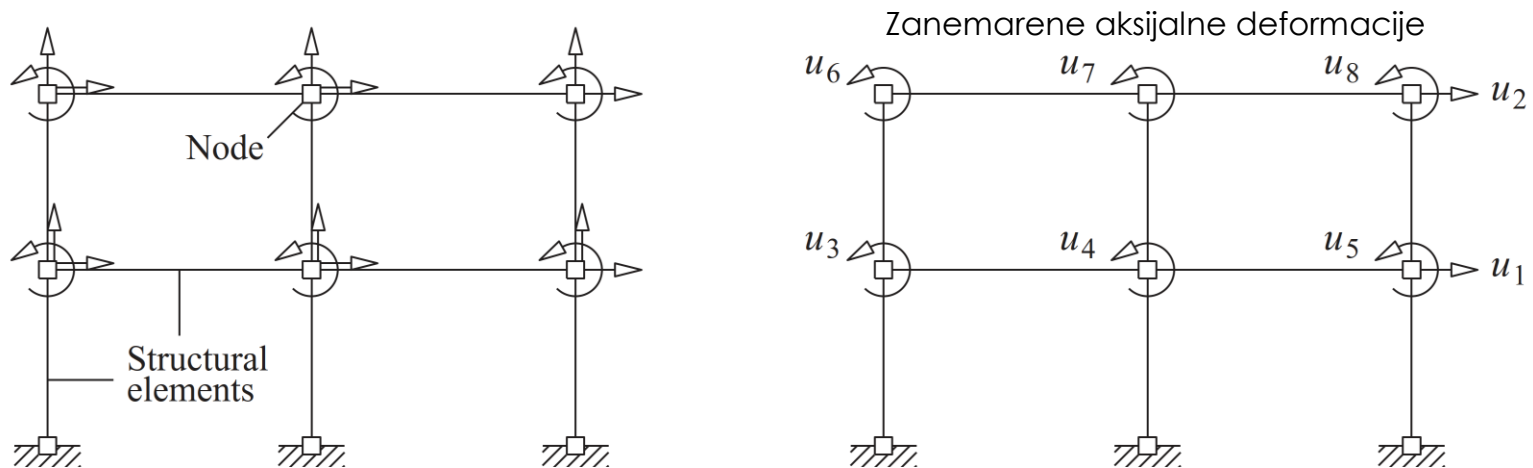
$k_i$  je krutost  $i$ -tog sprata koja je jednaka sumi krutosti stubova (elastični otpor pri horizontalnom pomeranju masa)

Krutost jednog stuba iznosi  $\frac{12EI}{L_{stuba}^3}$

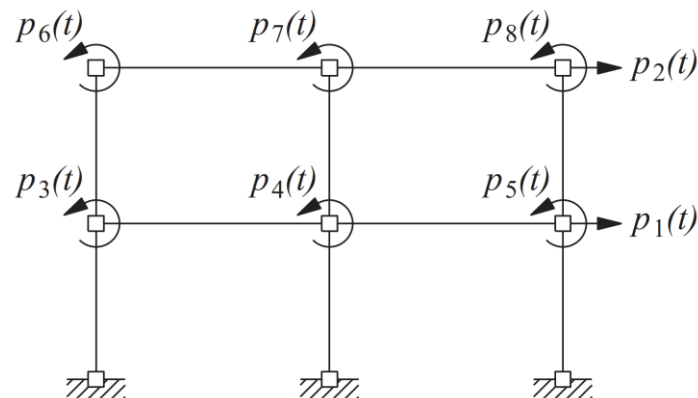
# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Jednačine kretanja

- Diskretizacija i stepeni slobode kretanja (Degrees of freedom)



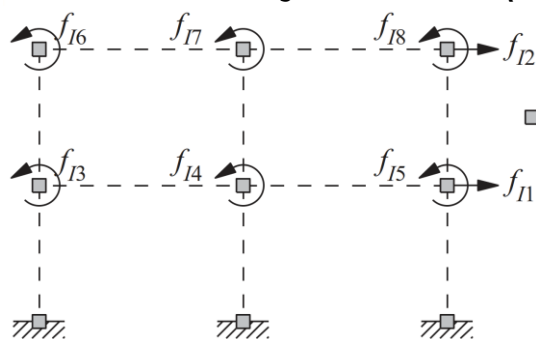
- Dinamičko dejstvo



# Sistemi sa više stepeni slobode

## Jednačine kretanja

### Inercijalne sile (sistem bez: krutosti, prigušenja i dinamičkog dejstva)

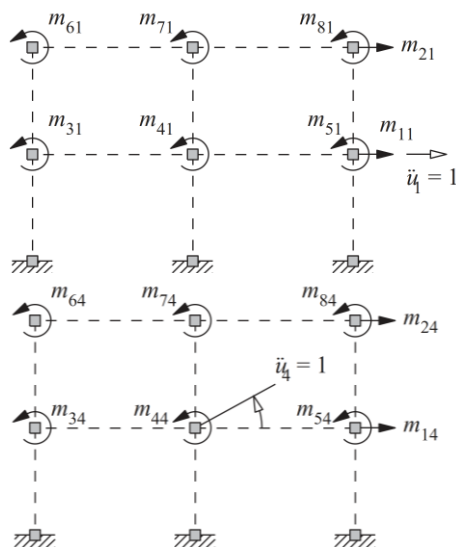


**Superpozicija:**  $f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{u}_j + \dots + m_{iN}\ddot{u}_N$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, N$ )

■ Koncentrisana masa u čvoru

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$$

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{Nj} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix}$$



### Značenje koeficijenata $m_{ij}$ matrice mase dinamičkog modela

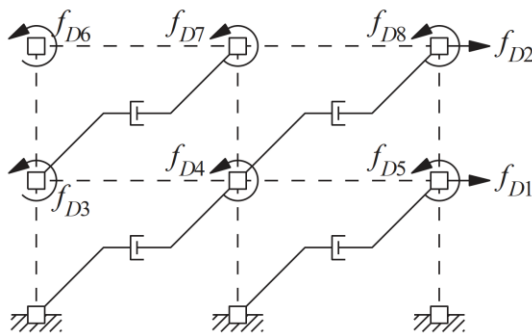
Ako se aplicira jedinično ubrzanje koje odgovara stepenu slobode  $j$ , a ubrzanja koja odgovaraju svim ostalim stepenima slobode imaju vrednost nula, stvaraju se odgovarajuće inercijalne sile (fiktivne sile) na mestima svih masa. S obzirom na to moraju postojati odgovarajuće spoljašnje sile koje će se uravnotežiti sa tim inercijalnim silama. Koeficijent matrice mase  $m_{ij}$  predstavlja spoljašnju generalisanu silu koja odgovara  $i$ -tom stepenu slobode usled jediničnog stanja ubrzanja koje odgovara  $j$ -tom stepenu slobode. Elementi prve kolone matrice mase  $m_{i1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) su spoljašnje generalisane sile potrebne za ostvarivanje ravnoteže sa inercijalnim generalisanim silama nastalim usled ubrzanja  $\ddot{u}_1 = 1$  pri čemu su istovremeno sva ostala ubrzanja jednaka nuli (stanje ubrzanja  $\ddot{u}_1 = 1$ ).

Elementi četvrte kolone matrice mase  $m_{i4}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) su spoljašnje generalisane sile potrebne za ostvarivanje ravnoteže sa inercijalnim generalisanim silama nastalim usled ubrzanja  $\ddot{u}_4 = 1$  pri čemu su istovremeno sva ostala ubrzanja jednaka nuli (stanje ubrzanja  $\ddot{u}_4 = 1$ ).

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Jednačine kretanja

- **Sile viskoznog prigušenja** (sistem bez: mase, krutosti i dinamičkog dejstva)



**Superpozicija:**  $f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots + c_{ij}\dot{u}_j + \dots + c_{iN}\dot{u}_N \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N)$

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Nj} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{bmatrix}$$

### Značenje koeficijenata $c_{ij}$ matrice viskoznog prigušenja dinamičkog modela

Unutrašnje viskozno prigušenje

Aplicira se jednična brzina j-tom stepenu slobode, pri čemu su brzine svih ostalih stepeni slobode jednake nuli. Ove brzine će generisati unutrašnje sile viskoznog prigušenja, a s obzirom na to moraju postojati spoljašnje sile da bi bila ostvarena ravnoteža.

Koeficijent matrice viskoznog prigušenja  $c_{ij}$  je spoljašnja generalisana sila koja odgovara i-tom stepenu slobode usled jediničnog stanja brzine j-tog stepena slobode.

Elementi prve kolone matrice prigušenja  $c_{i1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) su spoljašnje generalisane sile potrebne za ostvarivanje ravnoteže sa generalisanim silama prigušenja nastalim usled brzine  $\dot{u}_1 = 1$  pri čemu su istovremeno sve ostale brzine jednake nuli.

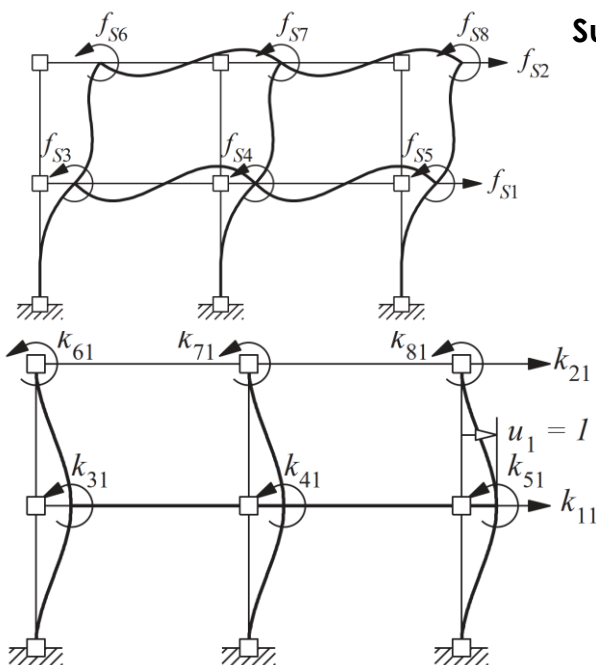
$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

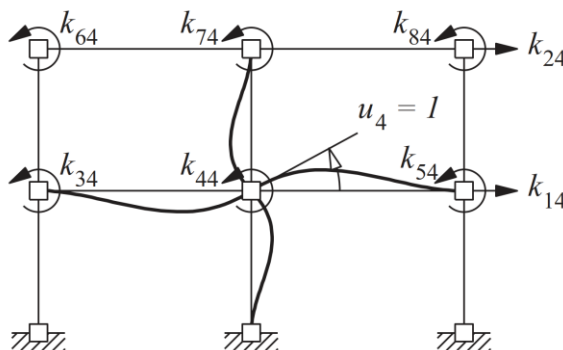
## ■ Jednačine kretanja

### ■ Elastične sile (sistem bez: mase, prigušenja i dinamičkog dejstva)

**Superpozicija:**  $f_{Si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \dots + k_{ij}u_j + \dots + k_{iN}u_N$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, N$ )



$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nj} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u}$$

### Značenje koeficijenata $k_{ij}$ matrice krutosti dinamičkog modela

Koeficijent  $k_{ij}$  matrice krutosti je generalisana sila na mestu  $i$  (odgovara  $i$ -tom stepenu slobode) usled jediničnog stanja generalisanog pomeranja na mestu  $j$  (generalisano pomeranje  $u_j = 1$ , a sva ostala generalisana pomeranja imaju vrednost nula).

Generalisane sile  $k_{i1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ; prva kolona matrice krutosti) odgovaraju  $i$ -tom stepenu slobode usled stanja pomeranja  $u_1 = 1$ .

Generalisane sile  $k_{i4}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ; četvrta kolona matrice krutosti) odgovaraju  $i$ -tom stepenu slobode usled stanja obrtanja  $u_4 = 1$ .

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Jednačine kretanja

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix}$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Jednačine kretanja

- U opštem slučaju važi da je  $m_{ij} \neq 0$ ,  $c_{ij} \neq 0$  i  $k_{ij} \neq 0$  kada je  $i \neq j$
- **Postoje dva specijalna slučaja:**
  - 1)  $k_{ij} \neq 0$  i  $m_{ij} = 0$  za  $i \neq j$  (matrica mase je dijagonalna)
    - za ovakav sistem se kaže da je **statički ili elastično spregnut (dinamički ili inercijalno nespregnut)**
  - 2)  $k_{ij} = 0$  i  $m_{ij} \neq 0$  za  $i \neq j$  (matrica krutosti je dijagonalna)
    - za ovakav sistem se kaže da je **dinamički ili inercijalno spregnut (statički ili elastično nespregnut)**
- **Dinamički model za analizu uobičajenih građevinskih konstrukcija**
  - **Statički ili elastično spregnut sistem** (dinamički ili inercijalno nespregnut sistem)
  - **Diskretno raspoređene mase** (koncentrisane mase u čvorovima modela prema tzv. pripadajućim dužinama i površinama) i maseni momenti inercije
  - **Matrica prigušenja se formira kao linearna kombinacija matrice mase i matrice krutosti** (biće kasnije objašnjeno)

$$\begin{bmatrix} m_{11} & & & & \\ & m_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix}$$

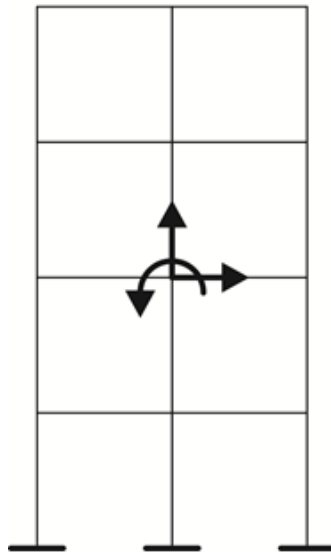
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

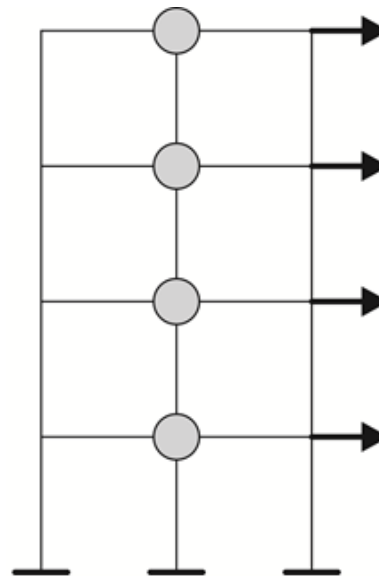
## ■ Kondenzacija stepeni slobode

- Prelazak sa modela za statičku analizu na model za dinamičku analizu koji ima manji broj stepeni slobode od statičkog modela može da se izvrši postupkom kondenzacije. Na taj način se eliminišu nebitni stepene slobode, a to su oni koji su vezani za male inercijalne sile (mala masa i/ili malo ubrzanje)

Statički model



Dinamički model



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Kondenzacija stepeni slobode

- Diferencijalne jednačine kretanja

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

- Uzimajući u obzir podelu na bitne i nebitne stepene slobode uz pretpostavku da inercijalne sile uz nebitne stepene slobode nemaju nikakav uticaj na odgovor sistema (index b predstavlja bitne, a index n nebitne stepene slobode) sledi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{nb} \\ \mathbf{K}_{bn} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}$$

- Prvi sistem jednačina glasi

$$\mathbf{K}_{nn}\mathbf{U}_n + \mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b = 0$$

- iz koga određujemo vezu između nebitnih i bitnih pomeranja

$$\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Kondenzacija stepeni slobode

- Drugi sistem jednačina glasi:  $\mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{U}}_b + \mathbf{K}_{bn}\mathbf{U}_n + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$
- Koristeći  $\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$  sledi:  $\mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{U}}_b + (\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bn}\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb})\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$
- **Kondenzovana matrica** krutosti glasi:  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bn}\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}$
- **Veza između bitnih i nebitnih stepeni slobode je statička pa se zbog toga postupak naziva i statička kondenzacija**
- Za slučaj dinamičkog dejstva koje deluje u pravcu bitnih stepeni slobode, zatim za sistem koji ima koncentrisane mase i čije je prigušenje jednako nuli prethodno opisanim postupkom statičke kondenzacije ne činimo nikakvu grešku
- U opštim slučajevima, kada prethodno navedene pretpostavke nisu ispunjene i dalje upotrebljavamo postupak statičke kondenzacije ali pri tome u proračun uvodimo određenu grešku jer je statička veza između bitnih i nebitnih stepeni slobode približna

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Analiza bez prigušenja i bez spoljašnjeg dejstva

$$[m]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = \{0\}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & & & & & \\ & m_{22} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

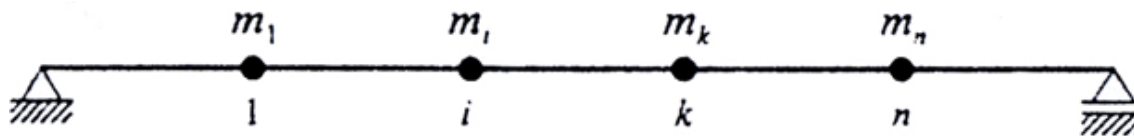
# Sistemi sa više stepeni slobode

Komentar:

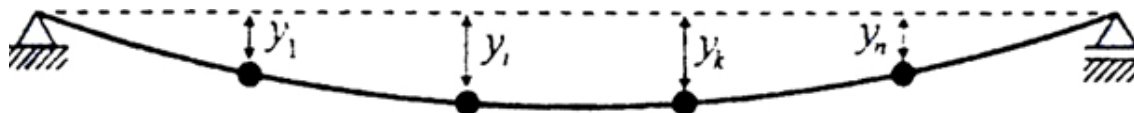
**Statički ili elastično spregnut sistem**  
kod koga je u opštem slučaju  $k_{ij} \neq 0$   
i  $m_{ij} = 0$  za  $i \neq j$  (inercijalno ili  
dinamički nespregnut sistem)

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

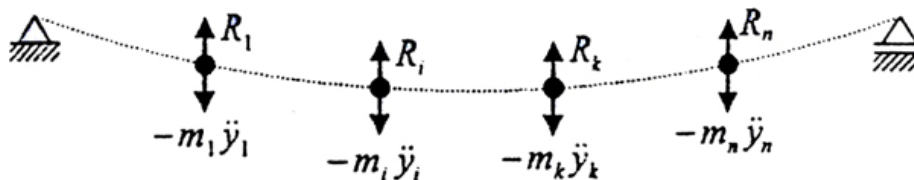
- Jednačine kretanja mogu da se odrede analizom dinamičkog sistema sa  $n$  stepeni slobode kretanja (postoji mogućnost samo vertikalnog pomeranja koncentrisanih masa)



- Sistem je izveden iz ravnotežnog položaja i vrši slobodne neprigušene vibracije (sinhrone i sinfazne vibracije (sve mase će vibrirati istom frekvencijom i istom fazom) harmonijskog tipa)



- Na svaku masu deluju inercijalne sile i restitucione sile  $R$  (elastične sile koje teže da vrate masu u ravnotežni položaj). Jednačine dinamičke ravnoteže ( $n$  – broj stepeni slobode)



$$R_1 + m\ddot{y}_1 = 0$$

$$R_2 + m\ddot{y}_2 = 0$$

...

$$R_n + m\ddot{y}_n = 0$$

$$R_i + m\ddot{y}_i = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Pomeranje tačke  $i$  usled sile  $R_k = 1$  u tački  $k$  ima vrednost  $\delta_{ik}$  (fleksibilnost), a pomeranje tačke  $i$  usled sile  $R_k$  u tački  $k$  ima vrednost  $R_k \delta_{ik}$ . Pomeranje tačke  $i$  usled svih restitucionih sila iznosi

$$\begin{aligned}
 y_1 &= R_1 \delta_{11} + R_2 \delta_{12} + R_3 \delta_{13} + \dots + R_n \delta_{1n} \\
 y_2 &= R_1 \delta_{21} + R_2 \delta_{22} + R_3 \delta_{23} + \dots + R_n \delta_{2n} \\
 &\quad \dots \\
 y_n &= R_1 \delta_{n1} + R_2 \delta_{n2} + R_3 \delta_{n3} + \dots + R_n \delta_{nn}
 \end{aligned}
 \qquad
 y_i = \sum_{k=1}^n R_k \delta_{ik} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- Kada se sistem jednačina  $R_i + m \ddot{y}_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) reši po  $R_i$  pa se to rešenje uvrsti u jednačine  $y_i = \sum_{k=1}^n R_k \delta_{ik}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) dobija se sistem homogenih diferencijalnih jednačina kretanja drugog reda

$$\begin{aligned}
 y_1 + m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + m_3 \delta_{13} \ddot{y}_3 + \dots + m_n \delta_{1n} \ddot{y}_n &= 0 \\
 y_2 + m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + m_3 \delta_{23} \ddot{y}_3 + \dots + m_n \delta_{2n} \ddot{y}_n &= 0 \\
 &\quad \dots \\
 y_n + m_1 \delta_{n1} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{n2} \ddot{y}_2 + m_3 \delta_{n3} \ddot{y}_3 + \dots + m_n \delta_{nn} \ddot{y}_n &= 0
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 y_i + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{y}_k &= 0 \\
 i &= 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Prethodni sistem jednačina može da se prikaže u **matričnom obliku**

$$\{y\} + [\delta][m]\{\ddot{y}\} = \{0\}$$

- ili simbolički  **$\mathbf{y} + \mathbf{DM}\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$**

- gde su

- matrica mase

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

- vektor pomeranja

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

matrica fleksibilnosti (matrica pomeranja)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

vektor ubrzanja

$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix}$$

dinamička matrica

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{DM}$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Diferencijalne jednačine kretanja mogu da se izvedu i u drugom obliku ako se restitucione sile  $R_i$  izraze preko pomeranja  $y_i$

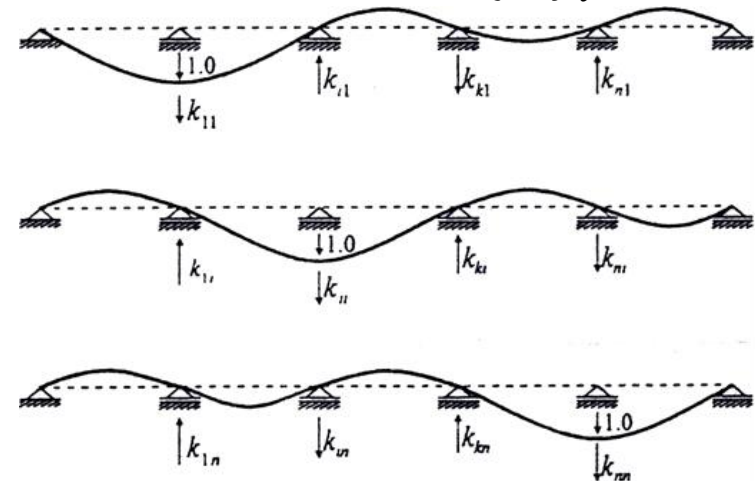
$$R_1 = k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + \dots + k_{1n}y_n$$

$$R_2 = k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + k_{23}y_3 + \dots + k_{2n}y_n$$

...

$$R_n = k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + k_{n3}y_3 + \dots + k_{nn}y_n$$

$$R_i = \sum_{k=1}^n k_{ik}y_k \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$



- Kada se izrazi  $R_i = \sum_{k=1}^n k_{ik}y_k$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) unese u  $R_i + m\ddot{y}_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) dobija se sistem homogenih diferencijalnih jednačina drugog reda

$$m_1\ddot{y}_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + \dots + k_{1n}y_n = 0$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + k_{23}y_3 + \dots + k_{2n}y_n = 0$$

...

$$m_n\ddot{y}_n + k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + k_{n3}y_3 + \dots + k_{nn}y_n = 0$$

$$m_i\ddot{y}_i + \sum_{k=1}^n k_{ik}y_k = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Prethodni sistem jednačina može da se prikaže u **matričnom obliku**

$$[m]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = \{0\}$$

- ili simbolički  **$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}$**
- gde su

- matrica mase

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

- vektor pomeranja

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

- matrica krutosti (matrica reakcija)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}$$

- vektor ubrzanja

$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti

- Pretpostavlja se da sve mase vrše sinhronu i sinfaznu vibraciju harmonijskog tipa. Tada će mase vibrirati istom frekvencijom i istom fazom. Sve mase prolaze istovremeno kroz ravnotežni položaj, a razlikuju se amplitude. Rešenje se traži u obliku

$$y_i = A_i \sin(\omega t + \alpha) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \alpha) = \mathbf{A} \sin(\omega t + \alpha) \quad \ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A} \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

- Ako se rešenje unese u jednačine kretanja dobija se sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina

$$\left. \begin{aligned} A_1 - m_1 \delta_{11} \omega^2 A_1 - m_2 \delta_{12} \omega^2 A_2 - \dots - m_n \delta_{1n} \omega^2 A_n &= 0 \\ A_2 - m_1 \delta_{21} \omega^2 A_1 - m_2 \delta_{22} \omega^2 A_2 - \dots - m_n \delta_{2n} \omega^2 A_n &= 0 \\ &\dots \\ A_n - m_1 \delta_{n1} \omega^2 A_1 - m_2 \delta_{n2} \omega^2 A_2 - \dots - m_n \delta_{nn} \omega^2 A_n &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{A} - \mathbf{D} \mathbf{M} \omega^2 \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \left( \mathbf{D}_M - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{aligned} (k_{11} - m_1 \omega^2) A_1 + k_{12} A_2 + k_{13} A_3 + \dots + k_{1n} A_n &= 0 \\ k_{21} A_1 + (k_{22} - m_2 \omega^2) A_2 + k_{23} A_3 + \dots + k_{2n} A_n &= 0 \\ &\dots \\ k_{n1} A_1 + k_{n2} A_2 + k_{n3} A_3 + \dots + (k_{nn} - m_n \omega^2) A_n &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{K} \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti

- U matematičkom smislu prethodna jednačina predstavlja problem svojstvenih vrednosti para matrica **K** i **M**
- Da bi se odredilo netrivialno rešenje (potrebno je odrediti  $\omega^2$  za koje postoje netrivialna rešenja za **A**) determinanta koeficijenata uz nepoznate mora da bude jednaka nuli. Na taj način se dobija jednačina  $n$ -tog stepena u odnosu na nepoznate kvadrate svojstvenih kružnih frekvencija (karakteristični polinom ili karakteristična jednačina ili **frekventna jednačina**)

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad \det\left(\mathbf{D}_M - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I}\right) = 0$$

Komentar:

Svi korenovi frekventne jednačine su realni, njihov broj je jednak broju stepeni slobode kretanja i svi su pozitivni. Za dokaz videti literaturu

- Iz frekventne jednačine određuje se  $n$  nepoznatih svojstvenih kružnih frekvencija, pri čemu se za svaku od ovih kružnih frekvencija ostvaruju sinhrona i sinfazna vibracije
- Rešenja frekventne jednačine su svojstvene kružne frekvencije sistema

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n \quad (T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_n)$$

- gde se  $\omega_1$  naziva **prva ili osnovna svojstvena kružna frekvencija** ( $T_1 = 2\pi/\omega_1$  – **prvi ili osnovni svojstveni period vibracija**)

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti

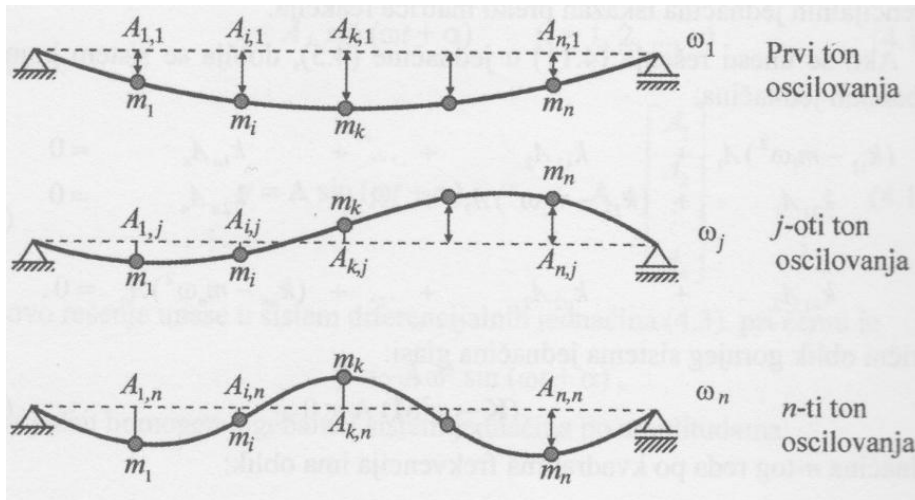
- Nakon određivanja svojstvenih kružnih frekvencija (pri čemu svakoj od njih odgovara jedno netrivialno rešenje za vektor  $\mathbf{A}$ ) amplitude ne mogu da se odrede eksplicitno jer je sistem jednačina homogen već se mogu odrediti samo količnici nepoznatih amplituda, tj. amplitude se mogu odrediti sa tačnošću do na konstantu
- Svakoj od svojstvenih kružnih frekvencija odgovara netrivialno rešenje za vektor  $\mathbf{A}$ , tj. važi sledeća relacija

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_i \qquad \mathbf{D}_M \mathbf{A}_i = \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{A}_i$$

- gde je  $\mathbf{A}_i$  vektor čiji su elementi konstante i koji se naziva karakteristični vektor ili **svojstveni vektor ili modalni vektor**, a predstavlja oblik (formu) vibriranja  $i$ -tog tona, a naziva se još i **priridni ili svojstveni oblik (forma) vibracija  $i$ -tog tona ( $i$ -ti ton vibracija)**
- Ako se jednom od elemenata svojstvenog vektora  $\mathbf{A}_i$  dodeli neka vrednost onda se iz sistema jednačina ostalih  $n - 1$  elemenata može jednoznačno odrediti. Ovo je **postupak normalizacije svojstvenih vektora** i dobijeni svojstveni vektori su **normirani svojstveni vektori**
- **Svojstvene vrednosti su jedinstven naziv za svojstvene kružne frekvencije (svojstvene periode) i njima odgovarajuće svojstvene oblike (forme) vibracija**

# Sistemi sa više stepeni slobode

- **Slobodne neprigušene vibracije – svojstvene vrednosti**
  - Svojstveni oblici vibracija (tonovi vibracija)



- Svaki ton vibriranja određen je vektorom amplituda
- Količnici amplituda su ili bezdimenzionalni brojevi u slučaju kada pomeranja svih masa imaju iste merne jedinice, npr. metar ili imaju dimenziju npr. metar/rad ako su generalisana pomeranja nekih diskretnih masa dužine, a nekih uglovi rotacije

- Stvarno kretanje masa u opštem slučaju jednako je linearnoj kombinaciji kretanja pri pojedinim tonovima vibriranja
- Poznavanje svojstvenih oblika i svojstvenih kružnih frekvencija osnovni je podatak za praćenje dinamičkog ponašanja pri određenim dinamičkim dejstvima
- Da bi se ostvarili svojstveni oblici, tj. da bi sistem vibrirao u nekom od svojih svojstvenih oblika moraju se zadati takvi početni uslovi koji će izazvati generalisana pomeranja koja odgovaraju svojstvenom obliku
- Razvijeni su mnogi numerički postupci za rešavanje problema svojstvenih vrednosti i neki od njih su implementirani u računarske za strukturalnu analizu konstrukcija

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Ortogonalnost svojstvenih oblika

- Za dva različita tona  $r$  i  $s$  važi ( $r \neq s$ )

$$\mathbf{K}\mathbf{A}_r = \omega_r^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_r \quad \mathbf{K}\mathbf{A}_s = \omega_s^2 \mathbf{M}\mathbf{A}_s$$

- Ako prethodne jednačine pomnožimo redom sa leve strane sa  $\mathbf{A}_s^T$  i  $\mathbf{A}_r^T$  sledi

$$\mathbf{A}_s^T \mathbf{K} \mathbf{A}_r = \omega_r^2 \mathbf{A}_s^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r \quad \mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_s = \omega_s^2 \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s$$

- Ako se prva relacija transponuje ( $[\mathbf{ABC}]^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ ), zbog simetrije u odnosu na glavnu dijagonalu matrice mase i matrice krutosti ( $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ ;  $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ ) sledi

$$\mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_s = \omega_s^2 \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s$$

- Prethodne dve relacije imaju iste vrednosti sa leve strane znaka jednakosti pa sledi

$$\omega_r^2 \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s = \omega_s^2 \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s \Rightarrow (\omega_r^2 - \omega_s^2) \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s = 0$$

- Pošto su tonovi međusobno različiti ( $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$ ) sledi uslov ortogonalnosti u odnosu na matricu mase

$$\mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s = 0 \text{ za } r \neq s$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Ortogonalnost svojstvenih oblika

- ... odnosno

$$\mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_s \neq 0 \text{ za } r = s$$

- Analogno prethodnom sledi i uslov ortogonalnosti u odnosu na matricu krutosti

$$\mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_s = 0 \text{ za } r \neq s \quad \mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_s \neq 0 \text{ za } r = s$$

- U slučaju da je  $r = s$  sledi:

- Generalisana (modalna) masa za ton  $r$

$$M_r = \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r$$

- Generalisana (modalna) krutost za ton  $r$

$$K_r = \mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_r$$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

- Svojstveni oblici  $r$  i  $s$  su ortogonalni u odnosu na matricu mase i krutosti pa se ove matrice nazivaju još i težinske matrice



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Ortonormiranje svojstvenih oblika

- Pogodno je svojstveni oblik vibracija  $r$  normirati na takav način da je ispunjen sledeći uslov

$$M_r = \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r = 1$$

- Da bi se prethodni uslov ispunio neophodno je svojstveni vektor  $\mathbf{A}_r$  pomnožiti koeficijentom  $\alpha$  da bi se dobile normirane vrednosti amplituda

$$\alpha \mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \alpha \mathbf{A}_r = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{A}_r^T \mathbf{M} \mathbf{A}_r}} = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \quad \boldsymbol{\Phi}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \mathbf{A}_r$$

- U ovakvom slučaju normiranja kaže se da su svojstveni vektori ortonormirani
- Nakon prethodne normalizacije važi sledeće  $K_r = \omega_r^2$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Postoji više numeričkih približnih metoda za rešavanje problema svojstvenih vrednosti (videti u nabrojanoj literaturi)
- **Stodola-Vianello iterativna metoda**
  - Pogodna za određivanje manjeg broja svojstvenih vrednosti
  - Kod sistema sa veoma velikim brojem stepeni slobode, gde se traže sve svojstvene vrednosti, treba koristiti efikasnije metode (videti nabrojanu literaturu)
  - Posmatra se standardni problem svojstvenih vrednosti

$$[H]\{X\} = \lambda\{X\}$$

$$[D_M]\{A_k\} = \lambda\{A_k\} \quad [M]^{-1}[K]\{A_k\} = \lambda\{A_k\}$$

- Svojstvene vrednosti su koreni frekventne jednačine, a njima odgovaraju svojstveni vektori

$$\det\left(\mathbf{D}_M - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}\right) = 0 \quad \det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad \lambda = \omega^2$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Ako postoji niz vektora  $\{B_0\}, \{B_1\}, \{B_2\}, \dots, \{B_m\}$ 
  - koji se određuju primenom iterativnog obrasca ( $D_M$  – **dinamička matrica**)
 
$$\{B_{m+1}\} = [D_M]\{B_m\}$$
  - tada granična vrednost količnika dva uzastopna vektora predstavlja najveću svojstvenu vrednost  $\lambda$ , a granična vrednost samog vektora  $\{B_m\}$  predstavlja svojstveni vektor **A** koji odgovara najvećoj svojstvenoj vrednosti
  - Na ovaj način se, **polazeći od dinamičke matrice**, određuje svojstvena kružna frekvencija i svojstveni oblik vibracija prvog tona ( $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = A_1$  i  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{B_{m+1}}{B_m} = \lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}$ ; dokaz videti u nabrojanoj literaturi)
- Proces je iterativan
  - Prvo se pretpostavi svojstveni vektor, tj. svojstveni oblik vibracija (dobro je odabrati vektor koji se *slaže* sa fizičkom prirodom dinamičkog modela)
  - Pre nove iteracije za  $\lambda_i$  u kojoj  $\{B_i\}$  postaje pretpostavljeni svojstveni vektor vrši se normalizacija  $\{B_i\}$  u odnosu na jedan element ovog vektora, tj. vrši se deljenje sa jednim elementom ovog vektora (ili izabranom konstantom), tj.  $\{B_{i+1}\} = \frac{1}{b_j}\{B_i\}$
  - Postupak se ponavlja dok razlika između svojstvenih vrednosti  $\lambda_i$  i  $\lambda_{i+1}$ , kao i razlika između komponenti svojstvenog vektora  $\{B_i\}$  i  $\{B_{i+1}\}$ , dve uzastopne iteracije bude manja od unapred utvrđenog malog broja

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Određivanje svojstvenih kružnih frekvencija i oblika vibracija ostalih tonova
  - Probni (početni) svojstveni vektor može da se napiše u obliku linearne kombinacije svojstvenih vektora svih  $n$  tonova

$$\{B_0\} = a_1\{A_1\} + a_2\{A_2\} + \dots + a_n\{A_n\}$$

- Ako u izraz za  $\{B_0\}$  unesemo uslov  $a_1 = 0$  tada će svojstveni vektor koji odgovara najvećoj svojstvenoj vrednosti biti izbrisan iz linearne kombinacije, tj. svojstveni vektor prvog tona će biti izbrisan iz linearne kombinacije
- Iterativni proces sada obezbeđuje određivanje sledeće najveće svojstvene vrednosti, a to je u ovom slučaju svojstvena vrednost drugog tona
- Svojstveni vektor  $\{A_1\}$  koji odgovara najvećoj svojstvenoj vrednosti je već određen. Zahteva se da probni svojstveni vektor  $\{B_1\}$  bude ortogonalan na  $\{A_1\}$

$$\{A_1\}^T [M] \{B_0\} = 0$$

- Odnosno koristeći prethodne dve jednačine sledi

$$a_1\{A_1\}^T [M] \{A_1\} + a_2\{A_1\}^T [M] \{A_2\} + \dots + a_n\{A_1\}^T [M] \{A_n\} = 0$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Određivanje svojstvenih kružnih frekvencija i oblika vibracija ostalih tonova
  - Vodeći računa o uslovima ortogonalnosti

$$\{A_1\}^T [M] \{A_2\} = 0 \quad \cdots \quad \{A_1\}^T [M] \{A_n\} = 0$$

- zaključuje se da mora da važi i sledeće

$$a_1 \{A_1\}^T [M] \{A_1\} = 0 \quad \{A_1\}^T [M] \{A_1\} \neq 0 \quad a_1 = 0$$

- pa probni svojstveni vektor ima sledeći oblik (indeks van zagrade označava brisanje tona sa najvećom svojstvenom vrednosti, a to je prvi ton)

$$\{B_0\}_1 = a_2 \{A_2\} + a_3 \{A_3\} + \cdots + a_n \{A_n\}$$

- Primena uslova ortogonalnosti dovodi do brisanja svojstvenog vektora koji odgovara najvećoj svojstvenoj vrednosti u linearnoj kombinaciji svojstvenih vektora svih tonova, a to je u ovom slučaju svojstveni vektor prvog tona

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Određivanje svojstvenih kružnih frekvencija i oblika vibracija ostalih tonova
  - Uslov ortogonalnosti  $\{A_1\}^T [M] \{B_0\} = 0$  u razvijenom obliku (prvi indeks je mesto amplitude, a drugi indeks je broj iteracije)

$$\{B_0\}_1 = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{Bmatrix} \quad A_{11} \sum_i M_{i1} A_{i1} + A_{21} \sum_i M_{i2} A_{i1} + \dots + A_{n1} \sum_i M_{in} A_{i1} = 0$$

- Prethodni izraz se može koristiti za određivanje bilo kog elementa probnog svojstvenog vektora u funkciji od svih preostalih (pri pisanju izraza  $A_{11c}$  je element probnog svojstvenog vektora čija je vrednost određena dok su svi ostali elementi proizvoljni)

$$A_{11c} = -\frac{\sum_i M_{i2} A_{i1}}{\sum_i M_{i1} A_{i1}} A_{21} - \frac{\sum_i M_{i3} A_{i1}}{\sum_i M_{i1} A_{i1}} A_{31} - \dots - \frac{\sum_i M_{in} A_{i1}}{\sum_i M_{i1} A_{i1}} A_{n1}$$

$$A_{21c} = A_{21} \quad A_{31c} = A_{31} \quad \dots \quad A_{n1c} = A_{n1}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Određivanje svojstvenih kružnih frekvencija i oblika vibracija ostalih tonova
  - Prethodni izrazi u matričnom obliku glase ( $[S]_1$  – matrica brisanja gde broj u indeksu predstavlja broj primenjenih uslova ortogonalnosti; vektor na levoj strani je početni vektor sa proizvoljnim elementima, a vektor na desnoj strani je ograničen postojanjem određenih veza)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sum_i M_{i2}A_{i1}}{\sum_i M_{i1}A_{i1}} & \dots & -\frac{\sum_i M_{in}A_{i1}}{\sum_i M_{i1}A_{i1}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11c} \\ A_{21c} \\ \vdots \\ A_{n1c} \end{Bmatrix} \quad [S]_1\{A_1\} = \{A_1\}_c$$

- Ako se na ograničeni vektor primeni operator iteracije tada će ovaj vektor konvergirati svojstvenom vektoru drugog tona ( $[D_M]_1$  – modifikovana dinamička matrica)

$$[D_M]\{A_1\}_c = [D_M][S]_1\{A_1\} = [D_M]_1\{A_1\} = \{A_2\}$$

$$[D_M]\{A_2\}_c = [D_M][S]_1\{A_2\} = [D_M]_1\{A_2\} = \{A_3\}$$

$$\vdots$$

$$[D_M]\{A_m\}_c = [D_M][S]_1\{A_m\} = [D_M]_1\{A_m\} = \{A_{m+1}\}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

### ■ Stodola-Vianello iterativna metoda

- Određivanje svojstvenih kružnih frekvencija i oblika vibracija ostalih tonova
  - Analognim postupkom se obezbeđuje konvergencija početnog (probnog) vektora ka vektoru koji odgovara trećoj po veličini svojstvenoj vrednosti, koja odgovara trećem tonu, pri čemu se primenjuju dva uslova ortogonalnosti početnog (probnog) vektora sa svojstvenim vektorima koji odgovaraju prvom i drugom tonu
  - Analognim postupkom se određuju i ostale svojstvene vrednosti
- Ako se u iterativnom procesu koristi dinamička matrica (**DM**) najveća svojstvena vrednost i njoj odgovarajući svojstveni vektor odgovaraju prvom ili osnovnom tonu (u iterativnom procesu se dobijaju svojstvene vrednosti za prvi ton, pa za drugi ton, pa za treći ton itd.)
- Ako se u iterativnom procesu koristi  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  najveća svojstvena vrednost i njoj odgovarajući svojstveni vektor odgovaraju najvišem tonu (u iterativnom procesu redosled određivanja svojstvenih vrednosti je obrnut u odnosu na redosled kod primene dinamičke matrice, tj. dobijaju svojstvene vrednosti od najvišeg tona redom ka nižim tonovima)



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije

- Modalni vektori mogu da se grupišu u kvadratnu matricu koja se naziva **modalna matrica**

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Formira se dijagonalna matrica čiji su elementi kvadrati svojstvenih kružnih frekvencija (**spektralna matrica**)

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

- Sada rešenja problema svojstvenih vrednosti i uslovi ortogonalnosti mogu da se prikažu na sledeći način

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

- **Modalna analiza (ili metoda superpozicije svojstvenih oblika ili metoda transformacije u glavne koordinate ili metoda razvijanja po svojstvenim oblicima)**
  - Sistem simultanih diferencijalnih jednačina kretanja može da se transformiše u sistem međusobno nezavisnih jednačina gde možemo svaku jednačinu rešavati metodama koje se koriste pri rešavanju sistema sa jednim stepenom slobode pomeranja. **Da bi jednačine postale nezavisne matrice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{C}$  moraju biti dijagonalne**
  - Diferencijalne jednačine kretanja u matričnom obliku glase (prinudne prigušene vibracije)
 
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$
    - gde je  $\mathbf{M}$  – matrica masa,  $\ddot{\mathbf{U}}$  – vektor ubrzanja,  $\mathbf{C}$  – matrica prigušenja,  $\dot{\mathbf{U}}$  – vektor brzina,  $\mathbf{K}$  – matrica krutosti,  $\mathbf{U}$  – vektor pomeranja i  $\mathbf{F}$  – vektor spoljašnjih sila
  - Uvodi se vektor  $\mathbf{Y}$  (vektor transformisanih koordinata ili vektor normalnih koordinata ili vektor modalnih koordinata) koji je sa vektorom pomeranja  $\mathbf{U}$  u sledećoj vezi (**ključna zamisao je da se vektor pomeranja  $\mathbf{U}$  izrazi pomoću svojstvenih vektora  $\Phi$** )

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i(t)$$

- Vektor pomeranja se izražava kao linearna kombinacija amplituda svojstvenih oblika vibracija
- Izraz predstavlja linearnu transformaciju generalisanih koordinata
- Matrica  $\Phi$  je nezavisna od vremena

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

- U prethodnoj jednačini matrica  $\Phi$  je matrica svojstvenih oblika (modalna matrica ili matrica transformacije)

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n] \quad n - \text{broj stepeni slobode}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \cdots & \phi_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Vektori brzine i ubrzanja mogu da se predstave na sledeći način

$$\dot{\mathbf{U}} = \Phi \dot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \dot{Y}_i(t) \quad \ddot{\mathbf{U}} = \Phi \ddot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \ddot{Y}_i(t)$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## Modalna analiza

- Unoseći izraze za  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  i  $\ddot{\mathbf{U}}$  u diferencijalne jednačine kretanja i množeći ih sa leve strane sa  $\Phi^T$  sledi

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{F}$$

- gde su

Matrica generalisanih (modalnih) masa	Matrica generalisanih (modalnih) prigušenja	Matrica generalisanih (modalnih) krutosti	Vektor generalisanih (modalnih) sila
$\bar{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$	$\bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$	$\bar{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$	$\bar{\mathbf{F}} = \Phi^T \mathbf{F}$

- Sada diferencijalne jednačine kretanja mogu da se zapišu u sledećem obliku

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{F}}$$

- Matrice  $\bar{\mathbf{M}}$  i  $\bar{\mathbf{K}}$  su dijagonalne zbog uslova ortogonalnosti, dok matrica  $\bar{\mathbf{C}}$  u opštem slučaju nije...

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_n \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix}$$

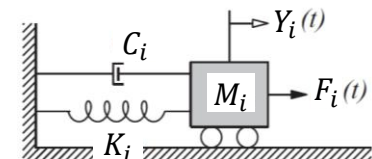
# Sistemi sa više stepeni slobode

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n \end{bmatrix}$$

## Modalna analiza

- ... međutim za sada se usvaja da je matrica  $\mathbf{C}$  takva da jednačina  $\bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$  predstavlja način njene transformacije na dijagonalnu matricu
- O definisanju matrice prigušenja biće reči kasnije
- Na ovaj način sistem od  $n$  simultanih diferencijalnih jednačina kretanja se prevodi u sistem od  $n$  nezavisnih diferencijalnih jednačina po  $Y$
- Dinamičke karakteristike sistema su generalisana masa, generalisana krutost i generalisano prigušenje, a njegovo kretanje je opisano modalnim koordinatama
- Diferencijalna jednačina kretanja  $i$ -tog tona ( $i$ -ta modalna jednačina; videti naredni slajd) glasi

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = F_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$



- gde su  $M_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i$        $C_i = \Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i$        $K_i = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i$        $F_i = \Phi_i^T \mathbf{F}$
- Generalisana masa      Generalisano prigušenje      Generalisana krutost      Generalisana sila
- $i$ -tog tona       $i$ -tog tona       $i$ -tog tona       $i$ -tog tona

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

- Diferencijalna jednačina  $i$ -tog tona ( $i$ -ta modalna jednačina)

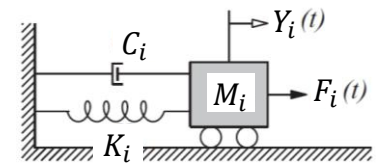
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \Phi \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i(t) \\ \dot{\mathbf{U}} &= \Phi \dot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \dot{Y}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{U}} &= \Phi \ddot{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \ddot{Y}_i(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{M}\Phi_i \ddot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{C}\Phi_i \dot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}\Phi_i Y_i(t) = \mathbf{F}$$

$$\Phi_j^T \cdot / \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}\Phi_i \ddot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{C}\Phi_i \dot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}\Phi_i Y_i(t) = \mathbf{F}$$

$$\Phi_j^T \mathbf{M}\Phi_i = 0 \quad \Phi_j^T \mathbf{C}\Phi_i = 0 \quad \Phi_j^T \mathbf{K}\Phi_i = 0 \quad \text{za } j \neq i$$

$$\Phi_i^T \mathbf{M}\Phi_i \ddot{Y}_i(t) + \Phi_i^T \mathbf{C}\Phi_i \dot{Y}_i(t) + \Phi_i^T \mathbf{K}\Phi_i Y_i(t) = \Phi_i^T \mathbf{F}$$

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = F_i$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

- Po analogiji sa sistemom koji ima jedan stepen slobode kretanja prigušenje računamo na sledeći način

$$C_i = 2\zeta\omega_i M_i$$

- Veza između generalisane (modalne) mase i generalisane (modalne) krutosti glasi

$$K_i = \omega_i^2 M_i$$

- Koristeći prethodne veze i deljenjem jednačine kretanja sa  $M_i$  sledi jednačina kretanja  $i$ -tog tona

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{F_i}{M_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- Prethodna jednačina se rešava metodama opisanim za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja (npr. za proizvoljno promenljivu silu može da se primeni numerička integracija)

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

- Nakon rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja za svaki ton posebno metodama koje se koriste za sistem sa jednim stepenom slobode vektor pomeranja u osnovnom koordinatnom određuje se na sledeći način

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{\Phi Y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

- Ekvivalentno statičko opterećenje  $\mathbf{F}_E(t)$  za analizu na statičkom modelu radi određivanja uticaja glasi

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{KU}(t) = \mathbf{K\Phi Y}(t) = \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i Y_i(t)$$

ili

$$\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K\Phi Y}(t) = \mathbf{M\Phi\Omega Y}(t) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \omega_i^2 Y_i(t)$$

$$\mathbf{K\Phi} = \mathbf{M\Phi\Omega}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

### ■ Početni uslovi

$$\mathbf{U}_0 = \Phi \mathbf{Y}_0 \Rightarrow \mathbf{Y}_0 = \Phi^{-1} \mathbf{U}_0 \quad \dot{\mathbf{U}}_0 = \Phi \dot{\mathbf{Y}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{Y}}_0 = \Phi^{-1} \dot{\mathbf{U}}_0$$

ili

$$\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{U}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{Y}_0 \Rightarrow \mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{U}_0$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \dot{\mathbf{Y}}_0 = \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{Y}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{Y}}_0 = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_0$$

- U okviru modalne analize moguće je proračunom obuhvatiti samo određen broj svojstvenih vrednosti, koje dominantno utiču na odgovor, pa se na taj način dobija približno rešenje u odnosu na ono sa obuhvatanjem svih tonova u analizi ali se smanjuje obim numeričke analize
- Svojstveni vektori koji su ortogonalni na vektor opterećenja ne utiču na odgovor sistema
- Može da se primeni za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

### ■ Prigušenje

- Kod klasično prigušenih sistema podrazumeva se da je sličan mehanizam prigušenja raspodeljen po celoj konstrukciji (npr. višespratna zgrada sa sličnim konstrukcijskim sistemom i materijalom po celoj visini)
- Klasična matrica prigušenja predstavlja idealizaciju matrice prigušenja za prethodno opisanu pretpostavku
- Rayleigh-jevo prigušenje (proporcionalno prigušenje)

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$$

- S obzirom na to da je matrica prigušenja definisana kao linearna kombinacija matrice masa  $M$  i matrice krutosti  $K$  za nju važi uslov ortogonalnosti i može da se primeni u modalnoj analizi (klasično prigušenje)
- Za svaki ton važi

$$C_i = a_0 M_i + a_1 K_i \quad C_i = 2\zeta_i \omega_i M_i$$

- Odnosno relativno prigušenje  $i$ -tog tona glasi  $\zeta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i \right)$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

### ■ Prigušenje

#### ■ Rayleigh-jevo prigušenje

- Ako usvojimo za dva tona  $i$  i  $j$  vrednosti relativnog prigušenja  $\zeta_i$  i  $\zeta_j$  možemo da odredimo koeficijente  $a_0$  i  $a_1$

$$\begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = 2 \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} (\zeta_i \omega_j - \zeta_j \omega_i) = 4\pi \frac{T_i \zeta_i - T_j \zeta_j}{T_i^2 - T_j^2}$$

$$a_1 = 2 \frac{\zeta_i \omega_i - \zeta_j \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} = \frac{1}{\pi} \frac{T_i T_j (T_i \zeta_j - T_j \zeta_i)}{T_i^2 - T_j^2}$$

- U slučaju  $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$

$$a_0 = 2\zeta \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} = \frac{4\pi_i \zeta}{T_i + T_j}$$

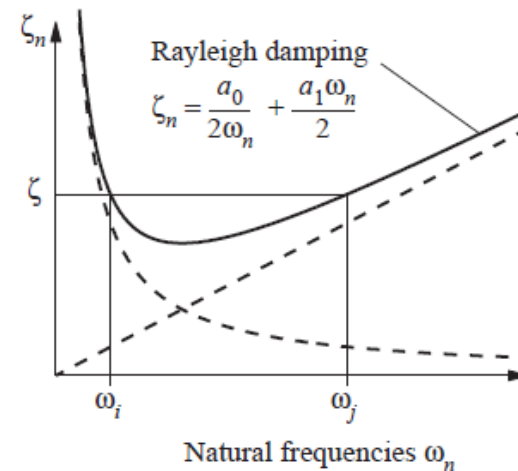
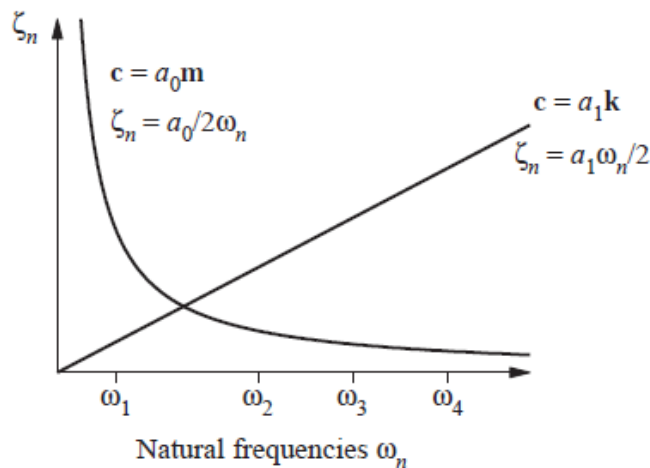
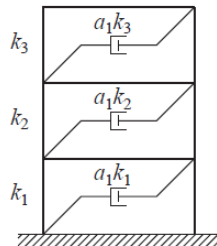
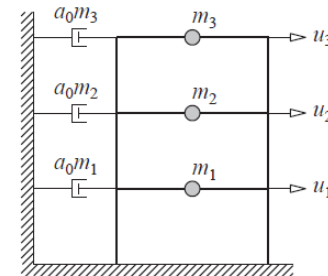
$$a_1 = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} = \frac{\zeta}{\pi} \frac{T_i T_j}{T_i + T_j}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## Modalna analiza

### Prigušenje

#### Rayleigh-jevo prigušenje



- Pretpostavka klasičnog prigušenja nije odgovarajuća kod sistema koji imaju dva ili više delova sa bitno raličitim nivoima prigušenja, kao npr. kod analize inteakcije tla i konstrukcije (u tlu ekvivalentno viskozno prigušenje iznosi 15% - 20%, a u konstrukciji 3% - 5%) ili kod sistema sa specijalnim uređajima za disipaciju energije ili kod sistema sa baznom izolacijom

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza

### ■ Pregled faza proračuna

- Formiranje matrice masa (dijagonalna matrica) i matrice krutosti (kondenzovana matrica krutosti) MDOF sistema
- Rešavanje problema svojstvenih vrednosti MDOF sistema (svojstvene kružne frekvencije i svojstveni oblici vibracija)
- Određivanje matrice prigušenja MDOF sistema (Rayleigh-jevo prigušenje)
- Formiranje modalnih jednačina i njihovo rešavanje metodama za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja
- Određivanje odgovora MDOF sistema kombinujući rezultate iz modalnih jednačina koristeći izraze

$$\mathbf{U}(t) = \Phi \mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i(t) \quad \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y}(t) = \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i(t) \quad \text{ili} \quad \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \Phi_i \omega_i^2 Y_i(t)$$

- Modalna analiza može da se primeni za proizvoljno promenljivo dejstvo
- **S obzirom na to da se kod modalne analize odgovor određuje za svaki ton posebno (sistem sa jednim stepenom slobode) ona može da se kombinuje sa spektrom odgovora i na taj način može da se reši problem kod sistema sa više stepeni slobode izloženog dejstvu zemljotresa definisanog preko spektra**
- Metoda je zasnovana na principu superpozicije pa se upotrebljava samo za linearno-elastične sisteme

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Direktna numerička integracija

- Naziv znači da se pre izvršavanja numeričke integracije ne vrši nikakva transformacija jednačine kao kod modalne analize pri čemu su obuhvaćeni svi stepeni slobode (svi tonovi)
- Može da se primeni za određivanje odgovora za proizvoljno dinamičko dejstvo
- Postupak je analogan postupku kod sistema sa jednim stepenom slobode (u tom delu prezentacije dato je izvođenje)

## ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem

- Postupak proračuna (indeksi:  $p$  – početak intervala i  $k$  – kraj intervala)
  - Samo jednom na početku
    - Formiranje matrice krutosti  $\mathbf{K}$ , matrice mase  $\mathbf{M}$ , matrice prigušenja  $\mathbf{C}$  (npr. Rayleigh-jevo prigušenje) i vektora opterećenja  $\mathbf{F}(t)$  dinamičkog modela
    - Zadati su početni uslovi, tj. vektori  $\mathbf{U}_0$  i  $\dot{\mathbf{U}}_0$
    - Na osnovu početnih uslova određuje se vektor početnih ubrzanja

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0)$$

- Usvajanje koraka integracije  $\Delta t$  (biće komentarisano kasnije)

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Direktna numerička integracija

### ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem

- Postupak proračuna (indeksi:  $p$  – početak intervala i  $k$  – kraj intervala)
  - Samo jednom na početku
    - Određivanje zamenjujuće krutosti

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C}$$

- Za svaki korak numeričke integracije
  - Određivanje vektora zamenjujućeg opterećenja

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_p + \mathbf{M} \left( \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_p + 2\ddot{\mathbf{U}}_p \right) + 2\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_p$$

- Rešavanje sistema algebraskih jednačina (dekompozicija zamenjujuće matrice krutosti jednom na početku proračuna kod linearno-elastičnih sistema)

$$\bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Direktna numerička integracija

### ■ Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem

- Postupak proračuna (indeksi:  $p$  – početak intervala i  $k$  – kraj intervala)
  - Za svaki korak numeričke integracije
    - Određivanje vektora pomeranja, brzine i ubrzanja

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_p + \Delta \mathbf{U}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_k = \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{U} - \dot{\mathbf{U}}_p$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_k = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{U} - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_p - \ddot{\mathbf{U}}_p \quad \text{ili} \quad \ddot{\mathbf{U}}_k = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_k - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k - \mathbf{K}\mathbf{U}_k)$$

- Bezuslovno numerički stabilna metoda



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Direktna numerička integracija

### ■ Napomene o metodama numeričke integracije

- Iskustvo pokazuje da je za odgovarajuću tačnost potrebno usvojiti

$$\Delta t \leq T_n/10$$

- Prethodni uslov mora biti ispunjen za sve tonove koje želimo sa dovoljnom tačnošću da obuhvatimo pri analizi
- Tačnost se povećava smanjivanjem vremenskog intervala  $\Delta t$
- Kod izbora trajanja intervala  $\Delta t$  treba uzeti u obzir i vremenski tok dinamičkog opterećenja jer u proračun ulaze samo veličine opterećenja na granicama između intervala. Interval se bira na takav način da se promene (lomovi, vrhovi i sl.) opterećenja podudaraju sa granicama intervala
- Kod zemljotresnog opterećenja, gde su vrednosti akcelorograma date obično u intervalima između 0.005 s do 0.02 s, obično se taj interval uzima za interval numeričke integracije u praktičnim proračunima tako da je zadovoljen prethodni uslovi

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Određivanje uticaja u elementima konstrukcije

- Nakon određivanja generalisanih pomeranja u čvorovima na dinamičkom modelu  $\mathbf{U}_b$  ( $b$  – bitni stepeni slobode) koji ima manje stepeni slobode od statičkog modela određivanje uticaja u elementima konstrukcije može da se sprovede na dva načina:

- **Prvi način**

- Odrede se ostala generalisana pomeranja na statičkom modelu pomoću izraza  $\mathbf{U}_n = -\mathbf{K}_{nn}^{-1}\mathbf{K}_{nb}\mathbf{U}_b$
- Koristeći vezu između generalisanih sila u čvorovima elementa i generalisanih pomeranja čvorova elementa preko matrice krutosti određuju se generalisane sile u čvorovima elemenata pomoću izraza  $\mathbf{R}_{\text{elementa}}(t) = \mathbf{k}_{\text{elementa}}\mathbf{u}(t)_{\text{elementa}}$  i nakon toga mogu da se odrede uticaji unutar elemenata konstrukcije

- **Drugi način**

- Odredi se ekvivalentno statičko opterećenje pomoću izraza  $\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}_b(t)$  nakon čega se na statičkom modelu određuju uticaji u elementima konstrukcije

- **Računarska implementacija**

- **Metoda konačnih elemenata**

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

- U opštem slučaju diferencijalne jednačine kretanja glase

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

- Veze između apsolutnih i relativnih pomeranja pri pomeranju osnove glase

$$u_{a1} = u_{r1} + u_t$$

$$u_{a2} = u_{r2} + u_t$$

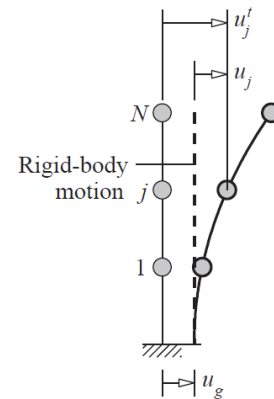
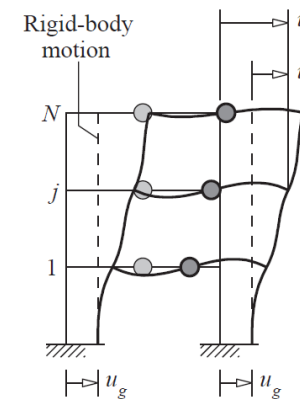
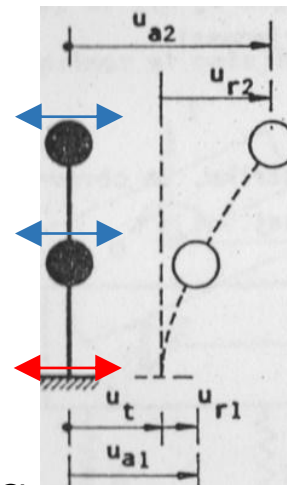
- odnosno u matičnom obliku

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_t$$

- gde je

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{1}u_t$$

- Prethodni izraz važi za slučaj izbora stepeni slobode kao na slici i pobuđivanja samo u pravcu stepeni slobode kretanja masa



Komentari:

- Ravanski sistem
- Translatorno pomeranje osnove
- Svi oslonci imaju isti vremenski tok pomeranja
- Svi dinamički stepeni slobode pomeranja su u istom pravcu kao i pomeranje tla

# Sistemi sa više stepeni slobode

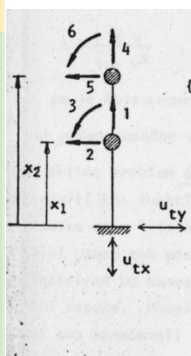
## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

- U opštem slučaju

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{l} \mathbf{u}_t$$

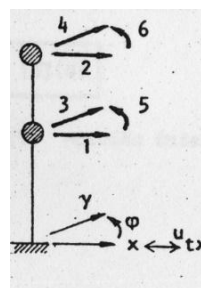
- gde je  $\mathbf{u}_t$  vektor koji sadrži komponente pomeranja tla u prostoru, a  $\mathbf{l}$  je vektor uticajnih koeficijenata koji predstavljaju pomeranje krute konstrukcije, kruto uklještene u tlo, kod jediničnih pomeranja tla u pojedinim pravcima

Prinudno pomeranje u horizontalnoj i vertikalnoj ravni



$$\{\mathbf{U}_t\} = [\mathbf{l}]\{\mathbf{u}_t\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \\ u_{tx} \\ u_{ty} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prinudno pomeranje u x pravcu

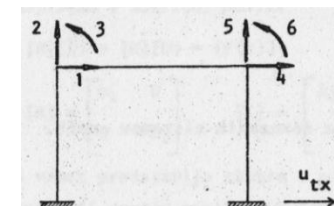


$$\{\mathbf{U}_t\} = [\mathbf{l}]\{\mathbf{u}_t\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{tx} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ u_{tx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prinudno pomeranje pod uglom od 45°

$$[\mathbf{l}]^T = [0.707 \quad 0.707 \quad 0.707 \quad 0.707 \quad 0 \quad 0]$$

Prinudno pomeranje u x pravcu



$$\{\mathbf{U}_t\} = [\mathbf{l}]\{\mathbf{u}_t\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{tx} = \begin{bmatrix} u_{tx} \\ 0 \\ 0 \\ u_{tx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

- Koristeći prethodne veze, analogno kao kod sistema sa jednim stepenom slobode kretanja, sledi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = 0$$

- gde je  $\ddot{\mathbf{U}}_a$  vektor apsolutnih ubrzanja,  $\dot{\mathbf{U}}_r$  vektor relativnih brzina i  $\mathbf{U}_r$  vektor relativnih pomeranja. Prvi sabirak u jednačini kretanja je vektor inercijalnih sila, drugi sabirak je vektor sila unutrašnjeg viskoznog prigušenja i treći sabirak su sile elastičnog otpora
- Sređivanjem se dobija ( $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_r + \mathbf{U}_t$ )

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t$$

- ili

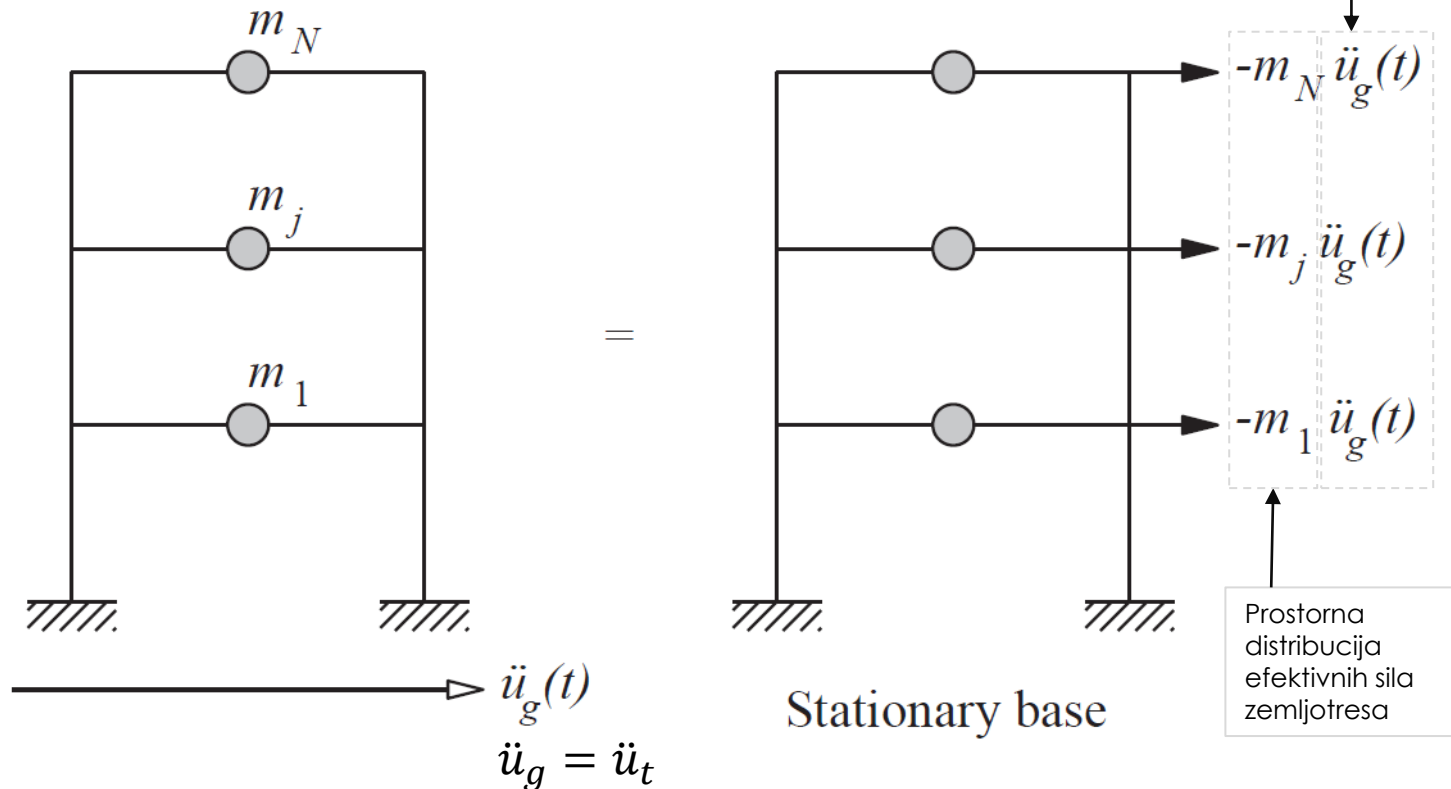
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}\mathbf{U}_a = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{K}\mathbf{U}_t$$

- gde izrazi na desnoj strani prethodne dve jednačine predstavljaju vektor efektivnih sila zemljotresa
- Prva od prethodne dve jednačine se koristi u praksi jer je seizmičko dejstvo obično zadato u vidu vremeske istorije zapisa ubrzanja tla (akcelerogram)

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K}\mathbf{U}_r = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_t = \mathbf{p}_{eff}$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

### ■ Vremenska analiza odgovora (akcelerogram)

#### ■ Modalna analiza

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = -\frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{l}}{M_i} \ddot{u}_t \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \mathbf{p}_{eff} = -\mathbf{M} \mathbf{l} \ddot{u}_t$$

- Svaka modalna jednačina se rešava numeričkom integracijom kao kod sistema sa jednim stepenom slobode. Ukupni odgovor se određuje na način opisan u delu prezentacije pod naslovom Modalna analiza

#### ■ Direktna numerička integracija

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_r + \mathbf{K} \mathbf{U}_r = -\mathbf{M} \mathbf{l} \ddot{u}_t$$

- Primenjuju se metode numeričke integracije ranije opisane za određivanje odgovora usled proizvoljno promenljivog dinamičkog dejstva
- Rešenja određena modalnom analizom ili direktnom integracijom za proizvoljno promenljivo dinamičko dejstvo (npr. akcelerogram) međusobno su ista, naravno ako su modalnom analizom obuhvaćeni svi tonovi dinamičkog modela

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- S obzirom na to da se kod modalne analize odgovor određuje za svaki ton posebno (kao da je sistem sa jednim stepenom slobode) ona može da se kombinuje sa spektrom odgovora i na taj način može da se reši problem kod sistema sa više stepeni slobode izloženog dejstvu zemljotresa definisanog preko spektra odgovora
- Nazivi koji se koriste:
  - Modalna analiza sa spektrima odgovora
  - Modalna spektralna analiza
  - Spektralna modalna analiza
  - Multimodalna spektralna analiza
  - Modalna seizmička analiza spektralnom teorijom
  - Spektralna analiza odgovora
  - Spektralna analiza
- Osnovni (referentni) način za određivanje uticaja usled seizmičkog dejstva prema EN 1998-1 je modalna analiza u kombinaciji sa metodom spektra odgovora koji može da se primeni za sve konstrukcije na koje se odnosi EN 1998-1



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Jednačina kretanja i-tog tona glasi (modalna analiza)

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y = -\frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{l}}{M_i} \ddot{u}_t \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- Zbog male razlike u veličini perioda (kružnih frekvencija) prigušenih i neprigušenih vibracija za uobičajene građevinske konstrukcije ( $0.0 < \zeta < 0.2$ ;  $\omega_d \cong \omega$ ) rešenje primenom Duhamel-ovog integrala za  $i$ -ti ton glasi

$$Y_i(t) = -\frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{l}}{\omega_i M_i} \int_0^t \ddot{u}_t(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau = \frac{L_i}{M_i} \frac{D_i(t)}{\omega_i} = \Gamma_i \frac{D_i(t)}{\omega_i}$$

- gde je faktor

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{l}}{M_i}$$

#### Komentar:

$\Gamma_i$  - naziv u literaturi je modalni faktor participacije (učešća)  $i$ -tog tona. Naziv nije prikladan jer asocira na to da  $\Gamma_i$  predstavlja meru učešća  $i$ -tog tona u ukupnom odgovoru MDOF sistema, a to nije tačno jer  $\Gamma_i$  zavisi od normalizacije svojstvenog vektora i ne predstavlja meru bilo koje modalne količine.

U slučaju ortonormiranja  $M_i = 1 \Rightarrow \Gamma_i = L_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{l}$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Maksimalna vrednost količnika  $D_i(t)/\omega_i$  u prethodnom izrazu (po analogiji sa sistemom sa jednim stepenom slobode kretanja) jednaka je odgovarajućoj veličini na spektru relativnih pomeranja  $\left| \frac{D_i(t)}{\omega_i} \right|_{max} = S_{di} = S_d(\omega_i, \zeta_i)$

- Sada maksimalna veličina  $Y_i$  i-tog tona iznosi

$$Y_{i,max} = \Gamma_i S_{di}$$

- Vektor maksimalnih relativnih pomeranja  $i$ -tog tona u osnovnom koordinatnom sistemu dobija se transformacijom

$$\mathbf{U}_{i,max} = \mathbf{\Phi}_i Y_{i,max} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{di} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pvi}}{\omega_i} = \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2}$$

- Vektor maksimalnih unutrašnjih sila  $i$ -tog tona (ekvivalentno statičko opterećenje koje se koristi za određivanje odgovora na statičkom modelu) u osnovnom koordinatnom sistemu dobijamo transformacijom  $(\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \mathbf{\Phi}_i \omega_i^2 Y_i(t))$

$$\mathbf{F}_{Ei,max} = \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_i \Gamma_i S_{pai}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Sile određene prethodnim izrazom nazivaju se seizmičke sile  $i$ -tog tona i koriste se kao ekvivalentno statičko opterećenje u daljoj statičkoj analizi sistema

$$S_i = F_{Ei,max} = \mathbf{M}\Phi_i\Gamma_i S_{pai}$$

- **Krajnji (ukupni) odgovor sistema kod primene spektra odgovora dobija se kombinacijom odgovora određenih za pojedine tonove. Pošto se, u opštem slučaju, maksimalne vrednosti odgovora za pojedine tonove javljaju u različitim vremenskim trenucima ukupni odgovor se određuje približno. Iz spektra odgovora ne možemo dobiti informaciju kada se javlja maksimalni odgovor**
- Pri kombinovanju maksimalnih modalnih odgovora uvode se određene pretpostavke...

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Ukupna smičuća sila  $V_{bi}$ , u osnovi konstrukcije,  $i$ -tog tona (tzv. bazna smičuća sila  $i$ -tog tona) u pravcu u kome je aplicirano ubrzanje tla jednaka je sumi svih seizmičkih sila za  $i$ -ti ton ( $\mathbf{S}_i = \mathbf{M}\Phi_i\Gamma_i S_{pai}$ ;  $L_i = \Phi_i^T \mathbf{M}\mathbf{l}$ ;  $\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i}$ )

$$V_{bi} = \mathbf{S}_i^T \mathbf{l} = \Phi_i^T \mathbf{M}\mathbf{l} \frac{L_i}{M_i} S_{pai} = \frac{L_i^2}{M_i} S_{pai} = m_i^* S_{pai}$$

- gde je  $m_i^*$  efektivna (modalna) masa  $i$ -tog tona (predstavlja deo od ukupne mase dinamičkog modela koja se angažuje (učestvuje) u  $i$ -tom tonu)
- Suma efektivnih masa svih tonova vibracija jednaka je ukupnoj masi dinamičkog modela

$$\sum_{j=1}^n m_j^* = \sum_{j=1}^n m_j$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Neke od mogućnosti za kombinovanje modalnih odgovora
  - SRSS (eng. square root of sum of squares)
    - Pretpostavka da su vibracije razmatranog sistema u pojedinim tonovima statistički nezavisne. Ova pretpostavka je uglavnom odgovara slučajevima kada periodi vibracija pojedinih tonova nemaju približno jednake vrednost (npr. prema EN 1998-1  $T_j \leq 0,9T_i$ ; pretpostavka  $T_j \leq T_i$ )

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

- CQC (eng. complete quadratic combination)
  - Prevazilazi ognaničenja SRSS načina kombinovanja (ako postoje i relativno bliski tonovi (sa bliskim svojstvenim periodima ili frekvencijama), postupak modalnog kombinovanja CQC daje realnije rezultate)

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i \rho_{ij} r_j}$$

$\rho_{ij}$  koeficijent korelacije  $i$ -tog i  $j$ -tog tona (vrednosti su između 0 i 1) zavisi od odnosa svojstvenih kružnih frekvencija i od prigušenja) pri čemu postoje različiti predlozi za njegovo određivanje, a jedan od njih je

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\zeta_i \zeta_j}(\beta \zeta_i + \zeta_j)\beta^{3/2}}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta_i \zeta_j \beta(1 + \beta^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_j^2)\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\omega_i}{\omega_j}$$

Ako je prigušenje jednako za sve tonove

$$\rho_{ij} = \frac{8\zeta^2(1 + \beta)\beta^{3/2}}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta(1 + \beta)^2}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

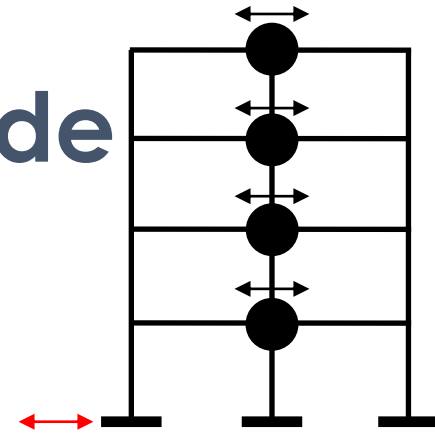
### ■ Spektralna analiza odgovora

#### ■ Kombinovanje modalnih odgovora

##### ■ !!!VAŽNO PRAVILO!!!

- Primenom bilo koje od metoda kombinovanja mogu se kombinovati samo konačne veličine određene za pojedine tonove
- Nije pravilno pomoću već kombinovanih veličina računati nove veličine
- Postupak analize
  - Za svaki ton posebno, odrede se seizmičke sile koje deluju na konstrukciju
  - Za svaki ton posebno, apliciramo njegove seizmičke sile na konstrukciju i statičkom analizom odredimo odgovor (generalisana pomeranja i sile u presecima)
  - Na kraju, kombinujemo veličine izračunate za svaki ton posebno nekom od metoda
- Nije pravilno ako bismo seizmičke sile svih tonova prvo kombinovali međusobno pa tek onda određivali odgovor sistema. Na taj način se gube predznaci sila koje deluju na konstrukciju

# Sistemi sa više stepeni slobode



## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

#### ■ Konstrukcije visokogradnje simetrične u osnovi – ravanski model

- Seizmičko dejstvo u pravcu stepeni slobode kretanja masa pa je vektor  $\mathbf{s} = \{\mathbf{1}\}$
- Faktor

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} = \frac{\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{1}}{M_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j}^2 m_j}$$

- gde se indeks  $i$  odnosi na ton, indeks  $j$  na stepen slobode kretanja mase (sprat) i  $n$  je broj stepeni slobode kretanja (broj spratova)
- Kod ortonormiranih svojstvenih oblika generalisana masa ima vrednost 1
- Sada seizmička sila  $i$ -tog tona i  $j$ -tog stepena slobode ( $j$ -tog sprata) glasi ( $\mathbf{S}_i = \mathbf{F}_{Ei,max} = \mathbf{M} \Phi_i \Gamma_i S_{pai}$ )

$$S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \Gamma_i S_{pai}$$

- Pomeranje u  $i$ -tom tonu  $j$ -tog stepena slobode ( $j$ -tog sprata) glasi

$$(\mathbf{U}_{i,max} = \Phi_i \Gamma_i S_{di} = \Phi_i \Gamma_i \frac{S_{pvi}}{\omega_i} = \Phi_i \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2})$$

$$u_{ij} = \phi_{i,j} \Gamma_i \frac{S_{pai}}{\omega_i^2} = \phi_{i,j} \Gamma_i \frac{T_i^2}{4\pi^2} S_{pai}$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

#### ■ Konstrukcije visokogradnje simetrične u osnovi – ravanski sistem

- Ako sumiramo sve seizmičke sile za  $i$ -ti ton sledi

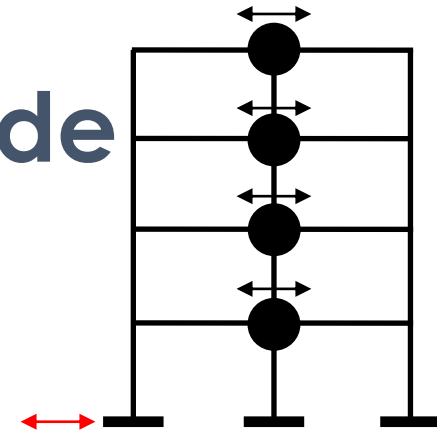
$$S_i = m_i^* S_{pai}$$

- gde je  $m_i^*$  efektivna (modalna) masa  $i$ -tog tona (predstavlja deo od ukupne mase dinamičkog modela koji se angažuje (učestvuje) u  $i$ -tom svojstvenom obliku)

$$m_i^* = \Gamma_i \sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j = \frac{(\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j)^2}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j}^2 m_j} = \frac{L_i^2}{M_i}$$

- Suma efektivnih (modalnih) masa svih tonova vibracija jednaka je ukupnoj masi dinamičkog modela

$$\sum_{j=1}^n m_i^* = \sum_{j=1}^n m_j$$





# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Primena spektra odgovora

### ■ Spektralna analiza odgovora

#### ■ Konstrukcije visokogradnje simetrične u osnovi – ravanski sistem

- Izraz  $S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \Gamma_i S_{pai}$  može da se prikaže i na sledeći način

$$S_{ij} = m_j \phi_{i,j} \Gamma_i \frac{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j}^2 m_j} S_{pai} = m_i^* \frac{(\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j)^2}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j}^2 m_j} \frac{\phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j} S_{pai}$$

- odnosno sledi  $S_{ij} = S_i \frac{\phi_{i,j} m_j}{\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} m_j}$

#### ■ Konstrukcije visokogradnje nesimetrične u osnovi – nesimetrične zgrade

- Kod nesimetričnih konstrukcija javlja se torzija koja može približno da se obuhvati pomoću torzionih momenata koji se određuju kao proizvod seizmičke sile i statičke ekscentričnosti između centra krutosti i centra mase
- Torzija može da se javi i kod simetričnih sistema zbog netačnosti u izvođenju, neravnomerne raspodele masa i različitih prinudnih pomeranja u pojedinim delovima osnove. S obzirom na to, propisima su definisani slučajni ekscentriciteti
- Kod nesimetričnih konstrukcija transatorne i torzione vibracije su spregnute što rezultira u dinamičkim ekscentričnostima koje mogu biti mnogo veće od statičkih
- Kod nesimetričnih sistema preporučuje se primena prostornih dinamičkih modela

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza... drugi pristup

### ■ Modalna ekspanzija vektora pobude

- Razmatra se slučaj opterećenja pri kome sve sile  $p_j(t)$  imaju istu vremensku promenu  $p(t)$ , a njihova prostorna raspodela se definiše se vektorom  $\mathbf{s}$  koji je nezavisan od vremena

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$$

- Centralna ideja je da vektor  $\mathbf{s}$  može predstaviti u zavisnosti od  $N$  tonova na sledeći način

$$\mathbf{s} = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r \mathbf{M} \Phi_r$$

- Množeći prethodnu jednačinu sa leve strane sa  $\Phi_n^T$  i vodeći računa o uslovu ortogonalnosti ( $\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_r \neq 0$  samo za  $r = n$ ), sledi

$$\Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{s}}{M_n}$$

Komentar:

Tkz. Modalni faktor participacije. Naziv nije prikladan jer navodi na zaključak da  $\Gamma_n$  predstavlja meru učešća pojedinog tona u ukupnom odgovoru, a to nije tačno jer zavisi od normalizacije oblika vibracija

- Doprinos  $n$ -tog tona vektoru  $\mathbf{s}$  iznosi  $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \Phi_n$  Komentar:  
Ne zavisi od normalizacije oblika vibracija

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza... *drugi pristup*

### ■ Modalna ekspanzija vektora pobude

- Ako zamislimo da na sistem deluju inercijalne sile tada jednačinu  $\mathbf{s} = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r \mathbf{M} \Phi_r$  možemo shvatiti kao ekspanziju raspodele ukupnih sila koje deluju na sistem preko sila koje deluju u pojedinim tonovima
- Inercijalne sile  $n$ -tog tona glase

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_n = -\mathbf{M} \Phi_n \ddot{Y}_n$$

- pri čemu je njihova prostorna raspodela data sa  $\mathbf{M} \Phi_n$  odgovara prostornoj raspodeli  $\mathbf{s}_n$
- Prva karakteristika vektora  $\mathbf{s}_n p(t)$  može da se dobije ako se napiše izraz za generalisanu silu  $r$ -tog tona

$$\mathbf{P}_r(t) = \Phi_r^T \mathbf{s}_n p(t) = \Gamma_n (\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_n) p(t)$$

- Zbog uslova ortogonalnosti ( $\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_n \neq 0$  samo za  $r = n$ ) vektor  $\mathbf{s}_n p(t)$  prouzrokuje odgovor samo za  $r = n$ , tj. samo u  $n$ -tom („svom“) tonu

$$\mathbf{P}_n(t) = \Gamma_n (\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n) p(t) = \Gamma_n M_n p(t)$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza... drugi pristup

### ■ Modalna ekspanzija vektora pobude

- Druga karakteristika koja proizilazi iz ekspanzije vektora pobude je da odgovor  $n$ -tog tona zavisi samo od vektora sila  $\mathbf{s}_n p(t)$ . Izraz za generalisanu silu može da se napiše na sledeći način

$$\mathbf{P}_n(t) = \Phi_n^T \mathbf{p}(t) = \Phi_n^T \mathbf{s} p(t)$$

- odnosno koristeći  $\mathbf{s} = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r \mathbf{M} \Phi_r$  sledi

$$\mathbf{P}_n(t) = \sum_{r=1}^N \Gamma_r (\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_r) p(t)$$

- odnosno zbog uslova ortogonalnosti ( $\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_r \neq 0$  samo za  $r = n$ ) sledi

$$\mathbf{P}_n(t) = \Gamma_n (\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n) p(t) = \Gamma_n M_n p(t)$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza... drugi pristup

$$\ddot{Y}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n}{M_n} = \frac{\Gamma_n M_n p(t)}{M_n} = \Gamma_n p(t) \quad /:\Gamma_n$$

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = p(t) \quad Y_n = \Gamma_n D_n$$

- Prethodna jednačina se može interpretirati kao jednačina kretanja za SDOF sistem sa jediničnom masom
- Doprinos  $n$ -tog tona u vektoru ukupnog pomeranja glasi

$$\mathbf{u}_n(t) = \Phi_n Y_n = \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$$

- Ekvivalentno statičko opterećenje  $n$ -tog tona glasi  $\mathbf{f}_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{M} \Phi_n Y_n(t)$ , odnosno koristeći izraz  $\mathbf{u}_n(t) = \Phi_n Y_n(t) = \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$  i  $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \Phi_n$  sledi

$$\mathbf{f}_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{M} \Phi_n Y_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{M} \mathbf{u}_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{M} \Gamma_n \Phi_n D_n(t) = \mathbf{s}_n [\omega_n^2 D_n(t)]$$

$\mathbf{s}_n$  – modalni statički deo odgovora

$[\omega_n^2 D_n(t)]$  – vremenski (dinamički) deo odgovora

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Modalna analiza... drugi pristup

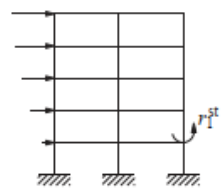
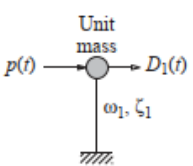
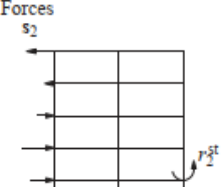
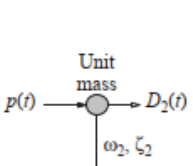
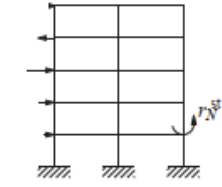
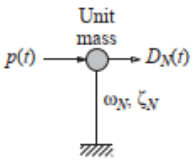
- Doprinos  $n$ -tog tona bilo kojoj veličini  $r$  koja se određuje može da se napiše na sledeći način

$$r_n(t) = r_n^{st} [\omega_n^2 D_n(t)]$$

$r_n^{st}$  – modalni statički deo odgovora usled  $s_n$

- Kombinovanjem odgovora iz svih tonova određuje se ukupni odgovor

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} [\omega_n^2 D_n(t)]$$

Mode	Static Analysis of Structure	Dynamic Analysis of SDF System	Modal Contribution to Dynamic Response
1	<p>Forces <math>s_1</math></p> 		$r_1(t) = r_1^{st} [\omega_1^2 D_1(t)]$
2	<p>Forces <math>s_2</math></p> 		$r_2(t) = r_2^{st} [\omega_2^2 D_2(t)]$
• • •	• • •	• • •	• • •
N	<p>Forces <math>s_N</math></p> 		$r_N(t) = r_N^{st} [\omega_N^2 D_N(t)]$
Total response			$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

### ■ Vremenska analiza odgovora (akcelerogram)

- Modalna analiza... drugi pristup

- Prostorna raspodela efektivne sile zemljotresa  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{eff} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t$  glasi

$$\mathbf{M}\mathbf{l} = \mathbf{s} = \sum_{n=1}^N s_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{M}\Phi_n \quad \Gamma_n = \frac{\Phi_n^T \mathbf{s}}{M_n} = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M}\mathbf{l}}{M_n} = \frac{L_n}{M_n} \quad \begin{aligned} L_n &= \Phi_n^T \mathbf{M}\mathbf{l} \\ M_n &= \Phi_n^T \mathbf{M}\Phi_n \end{aligned}$$

- Doprinos  $n$ -tog tona u vektoru  $\mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{l}$  glasi

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M}\Phi_n$$

- Modalne jednačine

$$\ddot{Y}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \Gamma_n p(t) = -\Gamma_n \ddot{u}_t$$

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_t \quad Y_n = \Gamma_n D_n$$

- Doprinos  $n$ -tog tona u pomeranju i ekvivalentno statičko opterećenje glase

$$\mathbf{u}_n(t) = \Phi_n Y_n = \Gamma_n \Phi_n D_n(t) \quad \mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n[\omega_n^2 D_n(t)]$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

### ■ Vremenska analiza odgovora (akcelerogram)

#### ■ Modalna analiza... drugi pristup

- Doprinos  $n$ -tog tona bilo kojoj veličini  $r$  koja se određuje može da se napiše na sledeći način

$$r_n(t) = r_n^{st} A_n(t) \quad \text{gde je pseudo-ubrzanje} \quad A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$$

- Statičko pomeranje usled  $\mathbf{s}_n$  (uvršćavanjem  $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \Phi_n$  i korišćenjem  $\mathbf{K} \Phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \Phi_n$ ) glasi

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_n^{st} = \mathbf{s}_n \Rightarrow \mathbf{u}_n^{st} = \mathbf{K}^{-1}(\Gamma_n \mathbf{M} \Phi_n) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \Phi_n$$

- odnosno uvršćavanjem prethodne jednačine u  $r_n(t) = r_n^{st} A_n(t)$  sledi

$$\mathbf{u}_n(t) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \Phi_n A(t) = \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$$

- Ukupni (totalni) odgovor  $r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} [\omega_n^2 D_n(t)]$  glasi

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \Phi_n D_n(t)$$



# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Proizvoljno pomeranje osnove (zemljotres)

### ■ Vremenska analiza odgovora (akcelerogram)

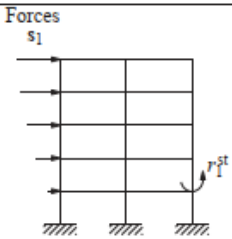
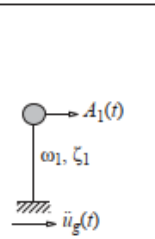
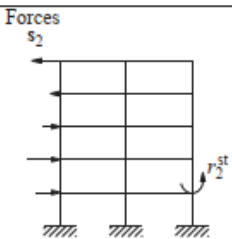
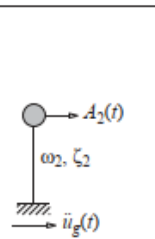
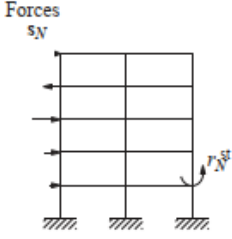
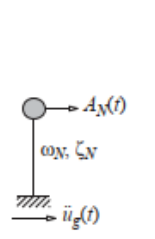
- Modalna analiza... drugi pristup
  - Konceptualno objašnjenje

### ■ Spektralna analiza odgovora

- Modalna analiza... drugi pristup
  - Ekstremna vrednost odgovora

$$r_{n0} = r_n^{st} S_{pa}$$

- Proračun odgovora po tonovima i kombinovanje modalnih odgovora se vrši kao što je ranije objašnjeno u spektralnoj analizi odgovora

Mode	Static Analysis of Structure	Dynamic Analysis of SDF System	Modal Contribution to Dynamic Response
1			$r_1(t) = r_1^{st} A_1(t)$
2			$r_2(t) = r_2^{st} A_2(t)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N			$r_N(t) = r_N^{st} A_N(t)$
Total response			$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## Metoda konačnih elemenata

- Raspodela pomeranja, brzine i ubrzanja u polju KE, u zavisnosti od pomeranja, brzine i ubrzanja u čvorovima KE (videti Metoda konačnih elemenata deo I, A. Rašeta i Metoda konačnih elemenata deo II, A. Rašeta, I. Džolev) glasi

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}}$$

- Inercijalne sile i sile unutrašnjeg viskoznog prigušenja KE glase

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}} \quad -c \frac{\partial u}{\partial t} = -c \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} \quad \begin{array}{l} \rho - \text{gustina} \\ c - \text{koeficijent prigušenja} \end{array}$$

- Princip virtualnog rada glasi (jednačina opterećenog KE)

$$\delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \left[ \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} dV - \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{d}} - \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{R} \right]$$

Vektor ekvivalentnog inercijalnog opterećenja

Vektor ekvivalentnog opterećenja sila prigušenja

- gde su **konzistentna matrica mase** i **konzistentna matrica prigušenja** KE

$$\mathbf{m}_{KE} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$$

$$\mathbf{c}_{KE} = \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## Metoda konačnih elemenata

### Konzistentna matrica mase konačnog elementa

- Ako usvojimo iste interpolacione funkcije kao za statičku analizu (videti Metoda konačnih elemenata deo I, A. Rašeta i Metoda konačnih elemenata deo II, A. Rašeta, I. Džolev) dolazimo do konzistentne matrice mase za linijski konačni element (prost štap i greda ik)

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 70 \\ 70 & 140 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_{x-y} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_{x-z} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Komentari:

- Sa matricom direktno koncentrisanih masa, u principu, dobijamo niže vrednosti svojstvenih frekvencija u odnosu na model sa konzistentnom matricom mase, a takođe i niže od tačnih vrednosti
- Sa konzistentnom matricom mase dobijamo, u principu, više vrednosti svojstvenih frekvencija u odnosu na tačne vrednosti

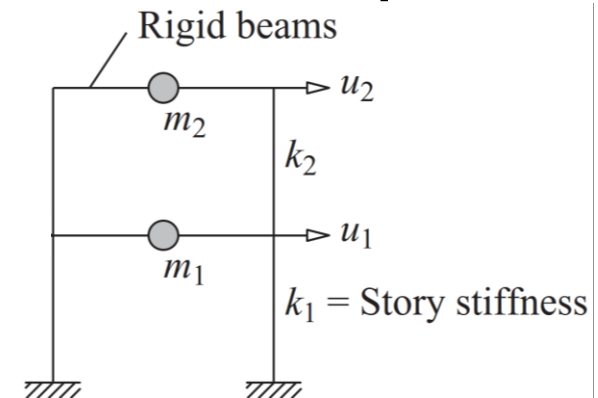
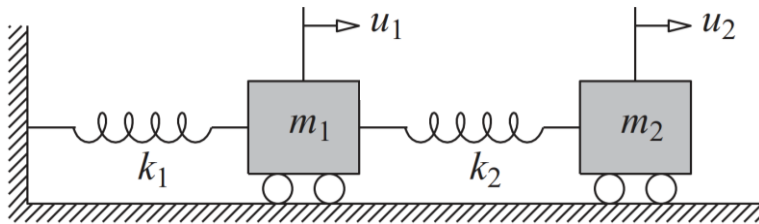
### Napomene

- Dijagonalizacija konzistentne matrice mase je od interesa...
  - Row-sum-lumping(diagonalization)
  - Hinton-Rock-Zienkiewicz (HRZ) method
- Kombinacijom matrica direktno koncentrisane mase i konzistentne mase, u principu, mogu da se dobiju vrednosti svojstvenih frekvencija koje su bliže tačnim u odnosu na modele sa direktno koncentrisanom masom i konzistentnom masom...

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Slobodne neprigušene vibracije sistema sa dva stepena slobode kretanja (2DOF)

- Diferencijalne jednačine kretanja



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Frekventna jednačina

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$$

$$a = m_1 m_2$$

$$b = -(k_{11}m_2 + k_{22}m_1)$$

$$c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$$

$$k_{12} = k_{21}$$

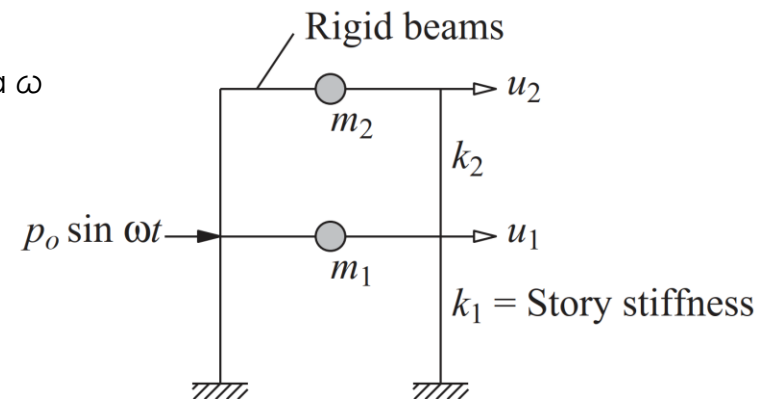
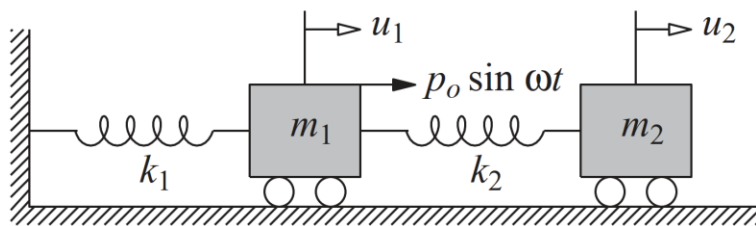
# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Prinudne neprigušene vibracije 2DOF – dinamički amortizer (Tuned Mass Damper; TMD)

### ■ Diferencijalne jednačine kretanja

Komentar:

Kružna frekvencija harmonijske sile je obeležena sa  $\omega$



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

### ■ Rešenje se traži u obliku (ustaljeni odgovor; steady-state response)

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

# Sistemi sa više stepeni slobode

## ■ Prinudne neprigušene vibracije 2DOF (TMD)

- Uvrštavanjem prethodnog rešenja u jednačine kretanja sledi

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ili} \quad \underline{[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

- odnosno sledi

$$\begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]^{-1} \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frekventna jednačina (određivanje svojstvenih kružnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ):  $\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = 0$

Determinanta u funkciji  $\omega_1$  i  $\omega_2$ :  $\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)$

$$u_{1o} = \frac{p_o \boxed{k_2 - m_2 \omega^2}}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad u_{2o} = \frac{p_o k_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

- Ako se parametri sistema odaberu tako da važi  $\omega^2 = k_2/m_2$  vibracije mase  $m_1$  na koju deluje harmonijska sila će se postepeno eliminisati

Komentari:

- Kružna frekvencija harmonijske sile je obeležena sa  $\omega$
- Svojstvene kružne frekvencije su obeležene sa  $\omega_1$  i  $\omega_2$

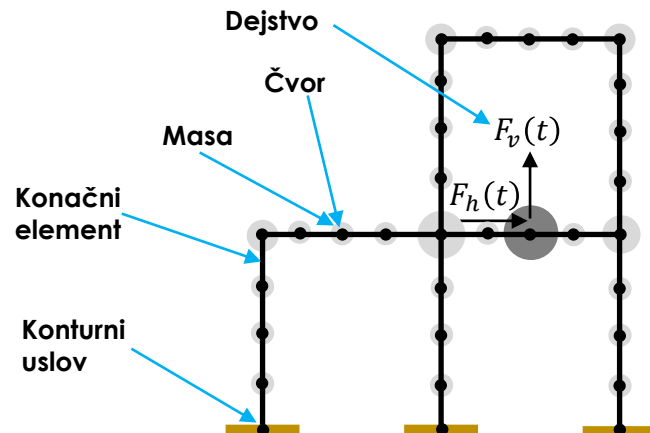
# Dinamička analiza

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

## REŠENJE HOMOGENOG SISTEMA

### PROBLEM SVOJSTVENIH VIBRACIJA

- Svojstvene vibracije (oscilacije) bez (za praktične proračune najčešći slučaj) i sa prigušenjem
- Postoje brojni postupci za rešavanje problema svojstvenih vrednosti
- **Računarska implementacija**



## REŠENJE NEHOMOGENOG SISTEMA

### DIREKтна NUMERIČKA INTEGRACIJA

#### Vremenska analiza odgovora

- Primena kod linearnih i nelinearnih analiza
- Primena kod svih sistema bez obzira na broj stepeni slobode i za proizvoljno dinamičko dejstvo (npr. prinudno pomeranje osnove usled zemljotresa)
- Rešenja se određuju samo u određenim diskretnim trenucima vremena
- Primenjuju se različite metode numeričke integracije (eksplicitni, implicitni i eksplicitno-implicitni postupci): Metoda centralnih razlika, Newmark-ov  $\beta$  postupak, Hilber-Hughes-Taylor-ova metoda, Bossak-ov  $\alpha$ B postupak, Houbolt-ov postupak, Wilson-ov postupak, itd.

#### Računarska implementacija

### MODALNA ANALIZA

- Sistem simultanih diferencijalnih jednačina može se transformisati u sistem međusobno nezavisnih jednačina. Da bi jednačine postale nezavisne matrice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{C}$  moraju biti dijagonalne (za dijagonalizaciju se koristi uslov ortogonalnosti modalnih vektora, a to znači da je pre početka analize neophodno rešiti svojstven problem bez prigušenja)
- Modalnih jednačina ima onoliko koliko ima stepeni slobode (svaka jednačina odgovara određenom tonu vibracija)
- Odgovor se određuje za svaku jednačinu postupcima za sistem sa jednim stepenom slobode, a ukupni odgovor dobija se superpozicijom odgovora po tonovima
- Primenjuje se u okviru linearno-elastične analize
- **Vremenska analiza odgovora:** proizvoljno dinamičko dejstvo (npr. prinudno pomeranje osnove usled dejstva zemljotresa)
- **Spektralna analiza odgovora:** modalna analiza u kombinaciji sa spektrima odgovora (modalna spektralna analiza)
- **Računarska implementacija**

# Modeliranje – napomene

## Linearna seizmička analiza

Tačnost je uslovljena tačnošću pojedinih faza, tj. prvenstveno zavisi od tačnosti najmanje tačne faze u postupku proračuna

Nivo tačnosti zemljotresnog dejstva?  
Nivo tačnosti opisa ponašanja?  
Često na odgovor utiče samo nekoliko najnižih frekvencija



Složen dinamički model nema smisla jer se ne mogu popraviti rezultati  
Dinamički model je jednostavniji od statičkog

Krutost, sile u presecima (u funkciji izvoda pomeranja) i naponi

Inercijalne karakteristike i pomeranja konstrukcije



Složeniji („tačniji“) matematički model

Jednostavniji matematički model



**Optimalno**



Statička analiza  
Složeniji („tačniji“) model  
  
Dinamička analiza  
Jednostavniji model



# Modeliranje – napomene

Složeniji statički model



Postupak statičke  
kondenzacije



Eliminacija nebitnih stepeni slobode  
pomeranja koji su najčešće vezani za  
male inercijalne sile



Jednostavniji dinamički  
model



## **NAJČEŠĆE U SVAKODNEVNOJ PRAKSI**

- Diskretni model (koncentrisane mase i zanemareni maseni momenti inercije)
- Inercijalno (dinamički) nespregnut sistem (matrica masa dijagonalna)
- Statički (elastično) spregnut sistem (matrica krutosti nije dijagonalna)

# Modeliranje – napomene

## ■ Grede i stubovi

- Linijski konačni elementi
- Kod monolitne veze greda sa pločom, pri čemu greda može biti T (ploča sa obe strane) ili  $\Gamma$  (ploča sa jedne strane) poprečnog preseka, treba voditi računa o efektivnoj širini preseka

## ■ Čvorovi

(a) Bez krutih čvornih zona



(b) Sa krutim čvornim zonama u gredama i stubovima (precenjena ukupna krutost konstrukcije)

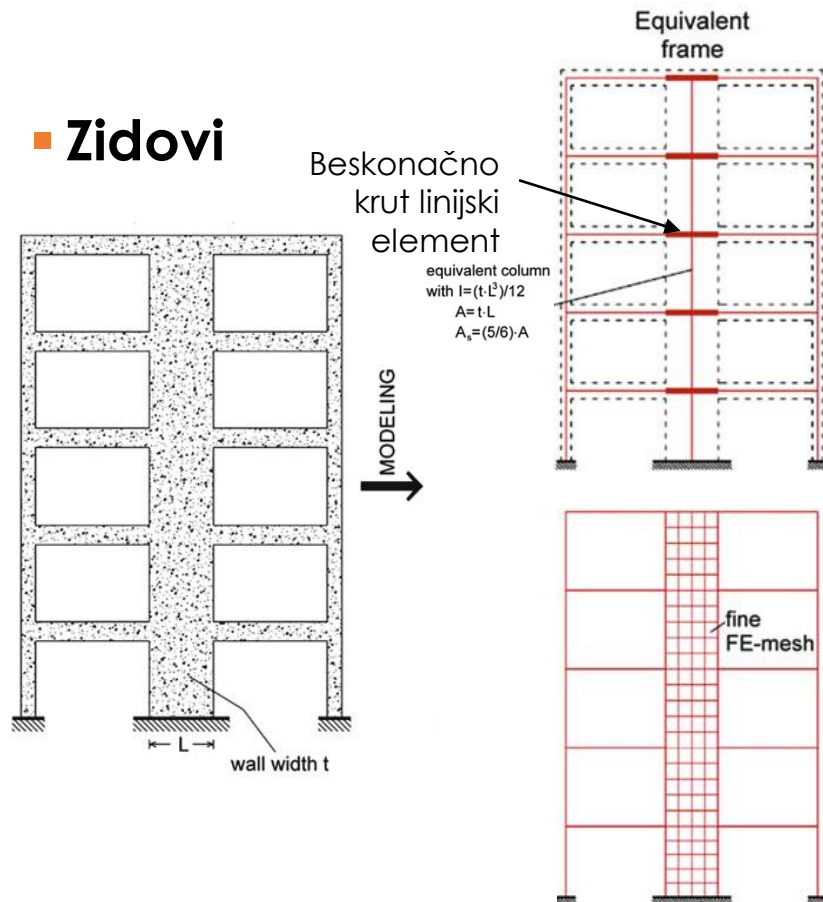


Komentari:

- Uobičajeno je da se kod elemenata manjih dimenzija i manje krutosti, a to su obično grede, deo unutar čvorne zone smatra beskonačno krutim, a krući elementi (obično stubovi) se modeliraju od čvora do čvora sa realnim karakteristikama
- Ako postoje krute zone na krajevima elementa onda se uticaji na kraju elastičnog dela koriste dalje u proračunu
- Ako na krajevima elementa nema krutih zona (stubovi) onda se za dalje analize mogu koristiti ili uticaji na kraju sisteme dužine (konzervativno) ili uticaji na donjem i gornjem licu greda na spoju sa stubom (realnija procena)

# Modeliranje – napomene

## ■ Zidovi

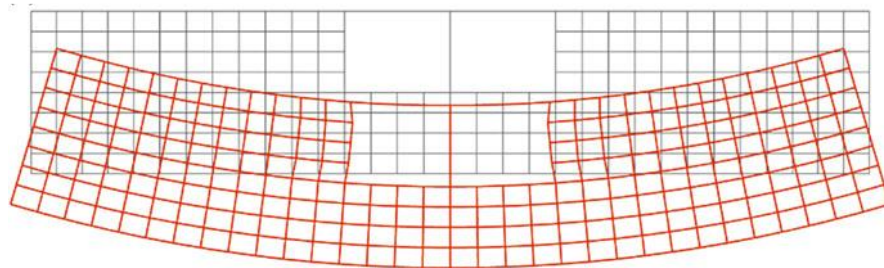
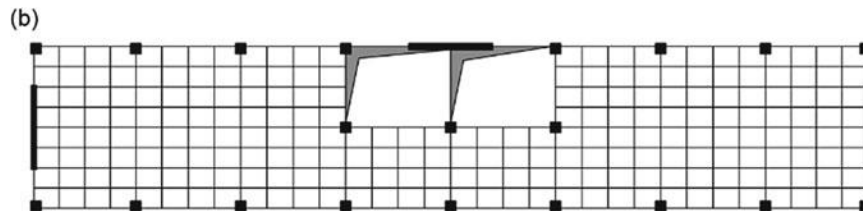
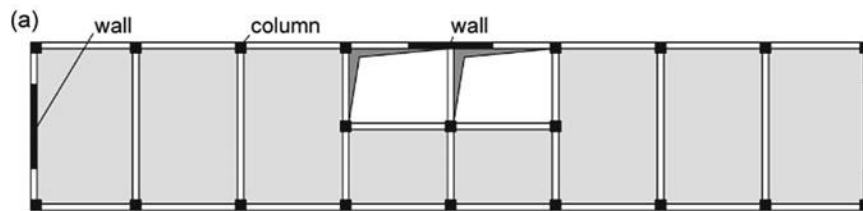


### Komentari:

- Generalno, linijski model sa prihvatljivom tačnošću može se primeniti za zidove koji rade dominantno na savijanje i sa odnosom visine i dužine  $h/L \geq 4$
- Kod složenih preseka zidova, kao npr. L, T, U i sl., nije preporučljivo koristiti linijske konačne elemente

# Modeliranje – napomene

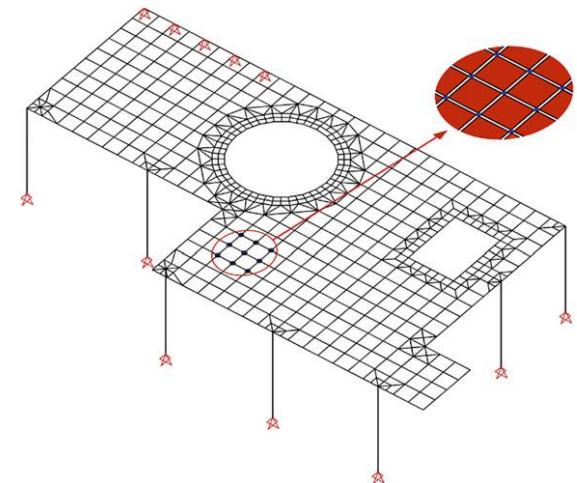
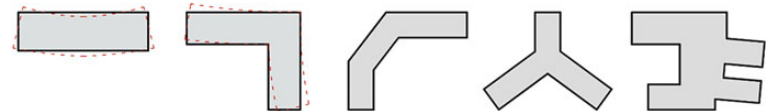
## ■ Ploče



Slabs with compact shape (→ Rigid floor diaphragm assumption)



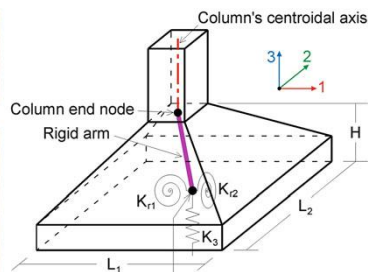
Slabs with non-negligible in-plane deformation



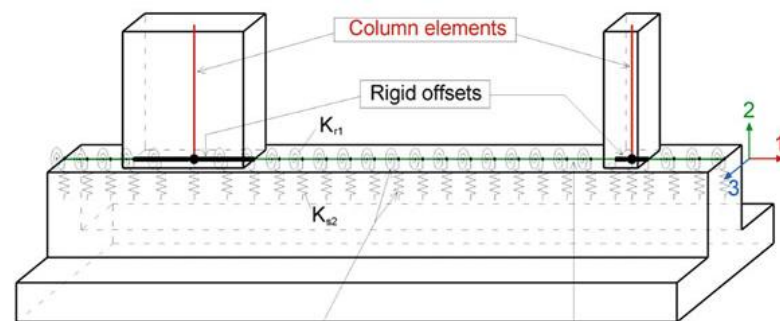


# Modeliranje – napomene

## ■ Temelji

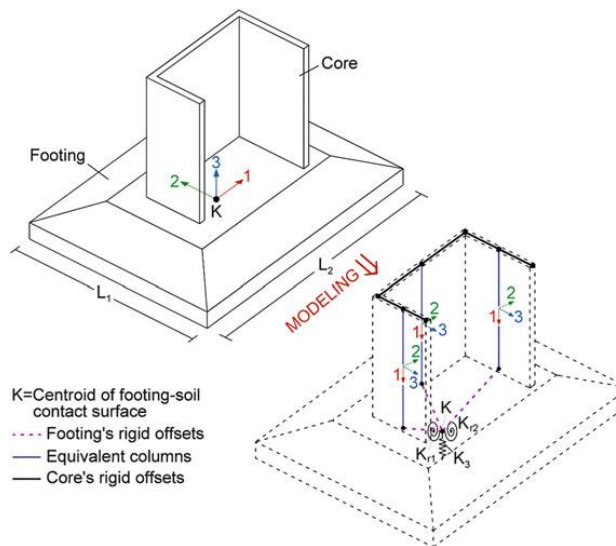
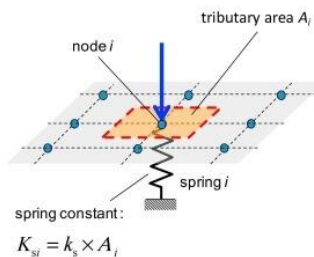
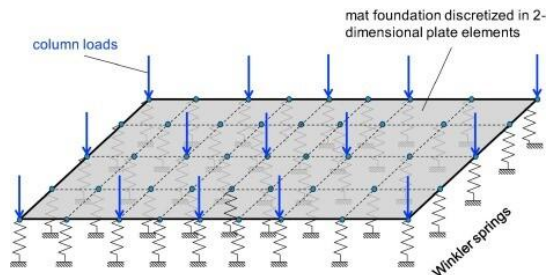


Support node at the geometric centre of the footing-soil contact surface. One vertical and two rotational springs with regard to the two horizontal axes simulate the soil's flexibility.



Continuous translational ( $K_{s2}$ ) and torsional ( $K_{r1}$ ) elastic support

Foundation beam axis simply placed at the column-end-node level



Komentar:  
Winklerov model  
(najjednostavniji i najčešći u svakodnevnoj praksi) za obuhvatanje interakcije konstrukcije i tla

Tlo	Modul reakcije tla $\bar{k}_s$ (kN/m <sup>3</sup> )
Rastresiti pijesak	4 800 – 16 000
Srednje zbijeni pijesak	9 600 – 80 000
Zbijeni pijesak	64 000 – 128 000
Zaglinjeni srednje zbijeni pijesak	32 000 – 80 000
Muljeviti srednje zbijeni pijesak	24 000 – 48 000
Zaglinjeno tlo:	
$q_a \leq 200$ kPa	12 000 – 24 000
$200 \text{ kPa} < q_a \leq 800$ kPa	24 000 – 48 000
$q_a > 800$ kPa	> 48 000

# Modeliranje – napomene

## ■ Zidovi ispune

- Ako znatno doprinose bočnoj krutosti i nosivosti treba da se uključe u model, tj. u tom slučaju zidanu ispunu je potrebno obuhvatiti u 3D modelu pri značajnoj neregularnosti u osnovi ili kod proračuna stubova na smicanje usled lokalnih efekata zidova ispune (EN 1998-1)
- Posebno mogu da imaju efekte kod ramovskih konstrukcija
- Prvi pristup
  - Modeliranje pritisnutom dijagonalom koja se oslanja na stub pri dnu i pri vrhu zidane ispune
  - Kod linearnih analiza može biti problem utvrditi koja je dijagonala pritisnuta jer se samo one uključuju u analizu
- Drugi pristup
  - Modeliranje zidane ispune primenom MKE sa površinskim konačnim elementima
  - S obzirom na to da se degradacija ispune vrlo brzo dešava pri dejstvu zemljotresa modul elastičnosti zida treba redukovati faktorom 0.5 ili manjim
- Ako uobičajeni zid ima više od jednog otvora (vrata i prozor) ili ako se odvoji od konstrukcije i poveže tako da ne ometa pomeranje same konstrukcije može se isključiti iz analize

# Modeliranje – napomene

## ■ Krutost na savijanje i smicanje

- Kod **AB konstrukcija** već pri relativno malom nivou opterećenja realni odnos sila-pomeranje nije linearan. **Pitanje je koju KRUTOST usvojiti za linearnu analizu.** Gornja granica je krutost homogenih (zanemarene prsline) preseka za AB, spegnute i zidane konstrukcije. Donja granica bi kod AB konstrukcija bila sekantna krutost koja odgovara trenutku početka tečenja armature. **KRUTOST bitno utiče na seizmički odgovor sistema**
- Manja krutost znači duži period vibracija i veće pomeranje, dok seizmičko dejstvo (ubrzanje, tj. seizmičko opterećenje) zavisi od perioda i od oblika spektra odgovora. Sa izuzetkom konstrukcija čiji je osnovni period vrlo kratak, seizmičko opterećenje se obično smanjuje sa smanjenjem krutosti, ili se ne menja (ovo odgovara horizontalnom platou spektra ubrzanja u EN 1998-1)
- Tokom jakog zemljotresa očekuje se neelastično ponašanje sistema i znajući da su tada pomeranja i deformacije ključne za procenu seizmičkih performansi, preporuka data u EN 1998-1 je da treba uzeti u obzir uticaj prislina na krutost poprečnih preseka i da donja granica krutosti odgovara trenutku početka tečenja armature, odnosno potreban je iterativni postupak (analiza ... korekcija krutosti ... opet analiza ... korekcija krutosti ... dok se rezultati ustale)...
- ... da bi se izbegao nepraktičan iterativni postupak u EN 1998-1 data je vrlo jednostavna preporuka da se u linearnoj analizi betonskih i zidanih konstrukcija za fleksionu i smučuću krutost poprečnih preseka svih konstrukcijskih elemenata mogu usvojiti vrednosti koje su jednake 1/2 krutosti homogenih (neisprskalih) poprečnih preseka za DCM i za DCH konstrukcije

## ■ Aksijalna krutost

- Usvaja se za bruto presek

## ■ Torziona krutost

- 10% od torzione krutosti bruto poprečnog preseka ili se čak i zanemaruje

# Modeliranje – napomene

## ■ Krutost

- Uniformna redukcija krutosti nije realna ali je pogodna za proračun
- Aksijalne sile pritiska imaju za posledicu manji stepen pojave prslina pri cikličnom opterećenju

### ■ ACI318, 2019

- Krutost na savijanje:
  - Stubovi:  $I_{ef} = 0,7I_g$
  - Zidovi bez prslina:  $I_{ef} = 0,7I_g$
  - Zidovi sa prslinama:  $I_{ef} = 0,35I_g$
  - Grede:  $I_{ef} = 0,35I_g$
  - Ravne ploče:  $I_{ef} = 0,25I_g$
- Aksijalna krutost:  $A_{ef} = 1,0A_g$
- Smičuća krutost:  $b_w h$
- **ASCE 41, 2013** (u zavisnosti od nivoa aksijalnog naprezanja)

$$\frac{I_{ef}}{I_g} = 0,7 \text{ za } \frac{P}{A_g f_c} \geq 0,5 \quad \frac{I_{ef}}{I_g} = 0,3 \text{ za } \frac{P}{A_g f_c} \leq 0,1$$

Napomena:  
između 0,5 i 0,1 – linearna interpolacija



# Modeliranje napomene

## ■ Masa (inercijalni efekti)

$$\sum G_{k,i} + \sum \Psi_{E,i} * Q_{k,i}$$

gde je  $\Psi_{E,i}$  koeficijent kombinacije promenljivog dejstva koji uzima u obzir da opterećenja  $Q_{k,i}$  nisu prisutna u punom iznosu na celoj konstrukciji tokom zemljotresa

$$\Psi_{E,i} = \varphi \cdot \Psi_{2,i}$$

Tabela 4.2: Vrednosti parametra  $\varphi$  u proračunu  $\Psi_{Ei}$

Vrsta promenljivog dejstva	Sprat	$\varphi$
Kategorije A-C*	Krov	1,0
	Spratovi sa sadržajima u korelaciji	0,8
	Spratovi sa nezavisnim sadržajem	0,5
Kategorije D-F* i Arhive		1,0

## EN 1998-1

Tabela 6.2: Korisna opterećenja na podovima, balkonima i stepeništima zgrada

Kategorije opterećenih površina	$q_k$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$Q_k$ [kN]
<b>Kategorija A</b>		
- podovi	1,5 do <u>2,0</u>	<u>2,0</u> do 3,0
- stepeništa	<u>2,0</u> do 4,0	<u>2,0</u> do 4,0
- balkoni	<u>2,5</u> do 4,0	<u>2,0</u> do 3,0
<b>Kategorija B</b>	2,0 do <u>3,0</u>	1,5 do <u>4,5</u>
<b>Kategorija C</b>		
- C1	2,0 do <u>3,0</u>	3,0 do <u>4,0</u>
- C2	3,0 do <u>4,0</u>	2,50 do 7,0 ( <u>4,0</u> )
- C3	3,0 do <u>5,0</u>	<u>4,0</u> do 7,0
- C4	4,5 do <u>5,0</u>	3,5 do <u>7,0</u>
- C5	<u>5,0</u> do 7,5	3,5 do <u>4,5</u>
<b>Kategorija D</b>		
- D1	<u>4,0</u> do 5,0	3,5 do 7,0 ( <u>4,0</u> )
- D2	4,0 do <u>5,0</u>	3,5 do <u>7,0</u>

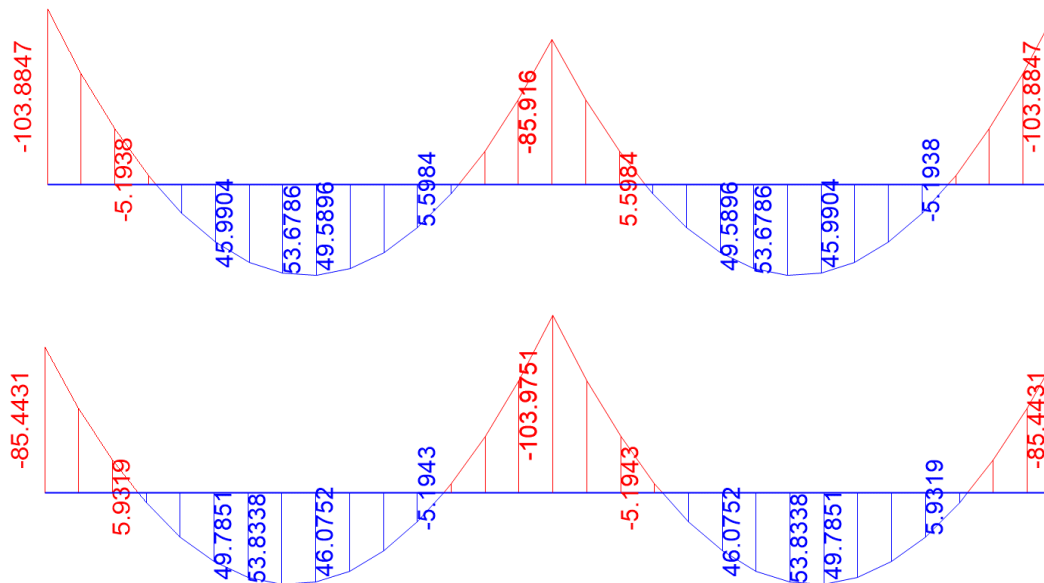
Tabela A1.1 — Vrednosti  $\psi$  koeficijentata za zgrade

Dejstvo	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Корисна оптерећења у зградама, према категорији (видети EN 1991-1-1)			
Категорија А: простори за становање и боравак	0,7	0,5	0,3
Категорија В: пословни простори	0,7	0,5	0,3
Категорија С: простори за окупљање људи	0,7	0,7	0,6
Категорија Д: трговачки простори	0,7	0,7	0,6
Категорија Е: складишни простори	1,0	0,9	0,8
Категорија F: саобраћајне површине, тежина возила ≤ 30 kN	0,7	0,7	0,6
Категорија G: саобраћајне површине, 30 kN < тежина возила ≤ 160 kN	0,7	0,5	0,3
Категорија H: кровови	0	0	0
Оптерећења од снега на зградама (видети EN 1991-1-3)			
за локације на надморској висини $H > 1\,000$ m за	0,70	0,50	0,20
локације на надморској висини $H \leq 1\,000$ m	0,50	0,20	0
Оптерећења од ветра на зградама (видети EN 1991-1-4)	0,6	0,2	0
Температура (осим од пожара) у зградама (видети EN 1991-1-5)	0,6	0,5	0

# Modeliranje – napomene

## ■ Efekat faznog (sekvencijalnog) građenja

- Uobičajeno u praksi je da se pri računskim analizama podrazumeva da konstrukcija AB zgrade nije izložena opterećenju dok nije u potpunosti izgrađena. Ovo nije prihvatljivo za sopstvenu težinu konstrukcije koja se postepeno dodaje dok se konstrukcija gradi
- Na slici je prikazana razlika između momenata savijanja u gredi jednog AB rama na 12 spratu usled stalnog opterećenja



Bez efekata  
faznog građenja

Sa efektima  
faznog građenja